ELEMENTI

DI

MECCANICA ED IDRAULICA

DEL

PROF. TOMMASO MAZZANI

CANONICO DI S. GIOVANNI IN LATERANO
MEMBRO DEL COLLEGIO FILOSOFICO
ECC. ECC. ECC.

Volume II.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
1863

ELEMENTI D'IDRAULICA

PROEMIO

1. *L'Idraulica* è la scienza matematica del moto dei fluidi per dirigerlo od impedirlo.

2. *Per liquido d'Idraulica* s'intende un aggregato di molecole, le quali benchè collegate da forza, questa per la sua piccolezza si considera come nulla rispetto le forze applicate: quindi il liquido d'Idraulica si considera come un sistema di molecole perfettamente sciolte, e perciò perfettamente mobili.

3. **Pressione**. Per questa mobilità delle molecole nell'Idraulica si considera una forza esclusivamente propria, e questa è la *pressione*. La pressione d'Idraulica è una forza che risente una molecola alla sua superficie dal fluido ambiente, e precisamente è l'azione che fa il fluido ambiente sopra una parte presa per unità della superficie della molecola circondata, sulla quale unità la pressione deve essere in tutti i punti la stessa.

4. La pressione agisce contro la superficie e le è normale, perchè se fosse obliqua si decomporrebbe in due l'una

tangente alla superficie e l'altra ad essa normale, ed è evidente che con questa sola premerebbe.

5. **Molecola d'Idraulica**. Egli è necessario per primo fissare la grandezza della molecola d'Idraulica, e poi l'espressione in calcolo della pressione. Se per la grandezza della molecola si prendesse una quantità finita, per quanto piccola ella fosse, sempre rimarrebbe incerta la sua grandezza, onde si potesse dire una molecola elementare. Quando però si dice che la molecola d' Idraulica è di grandezza infinitesima, o minore di ogni assegnabile, ci troviamo veramente nell'elemento del fluido. Oltre a ciò l'ipotesi dell'infinitesimo della molecola è utile doppiamente pel computo, primo perchè si sa che all'infinitesimo si può dare la figura che si vuole, e quindi per questa molecola si prende la figura più semplice che é il parallelepipedo rettangolare. Di poi nel calcolo degli infinitesimi si possono instituire operazioni sulle funzioni, comechè non si fissi nella funzione la maniera di calcolo, con cui sono collegate le costanti e le variabili.

6. **Rappresentanza in calcolo della pressione**. Riguardo alla rappresentanza in calcolo della pressione s'immagina dagli Idraulici un prisma di fluido di data densità e temperatura eretto normalmente sulla superficie unità premuta, a tale altezza, che il suo peso equivalga all'attuale pressione. Per questo fluido si prende l'acqua distillata o anche l' acqua stessa della quale si tratta nel caso particolare d' Idraulica.

7. Dopo ciò alla pressione si può dare l' espressione di calcolo. Uno è la base del nostro prisma, si dica anche uno la densità del fluido misuratore la pressione, uno la sua gravità, e si dica p l'altezza conveniente di questo prisma; uno base moltiplicato per p sarà il volume del prisma, uno base moltiplicato per uno densità, per p, sarà la massa del prisma, ed uno base per uno densità, per uno gravità e per

p, sarà il peso del prisma o la pressione, quindi semplicemente p esprimerà detta pressione.

8. Quando però si dirà p la pressione, ci ricorderemo che questo p esprime l'altezza di un prisma di acqua di base uno, e che in questo p ci sono sotto intese tre unità moltiplicatrici; cioè unità di base, unità di densità del fluido, ed unità di sua gravità, talchè se nel corso del trattato d'Idraulica si chiamasse g la gravità dell'acqua di cui si tratta, la pressione non si esprimerebbe più pel semplice p, ma per gp.

9. Posto ciò si vede che nei fluidi si deve tener conto della pressione e non nei solidi, perchè avendo i primi le molecole sciolte, la pressione che tende a spostarle vi ha tutto il suo effetto, che non può produrre nei solidi nei quali le molecole s'intendono invincibilmente collegate.

10. **Forze intrinseche e forze estrinseche**. Si vede ancora che ogni molecola fluida si deve intendere animata nei punti della massa da forze applicate, come per esempio dalla gravità, e nei punti della superficie dalle pressioni. Le prime perciò si dicono forze intrinseche e queste forze estrinseche.

11. **Fluido ridotto ad una molecola nel trattato d'Idraulica**. Si vede in ultimo che qualora una molecola qualunque di un fluido si considera animata da forze estrinseche non si deve avere più riguardo al resto del fluido di cui l'azione è valutata nelle pressioni, che la molecola si deve considerare come isolata, e che la quiete o il moto del fluido sarà la quiete o il moto di una sua molecola qualunque.

12. **Partizione dei fluidi**. I fluidi si distinguono in compressibili ed incompressibili.

Gli incompressibili sono quelli che non cambiano mai di volume, i compressibili sono quelli che lo cambiano all'azione delle forze e nei quali esiste la forza elastica che agisce con pari azione contro la pressione.

13. **Divisione dell' Idraulica**. Nella Idraulica, come nella Meccanica de' solidi, seguiremo la stessa partizione. Nella 1.ª parte tratteremo delle forze d'Idraulica e questa si intitolerà *Idrodinamica*. Nella 2.ª parte tratteremo dell'equilibrio delle forze e questa si dirà *Idrostatica*. La 3.ª parte tratterà del moto dei fluidi e si chiamerà *Idrocinamica*.

PARTE PRIMA

IDRODINAMICA

14. **Componenti secondo tre assi ortogonali del quantitativo di pressione sopra d' un piano.** *Ciascuna delle tre componenti, secondo tre assi ortogonali, del quantitativo di pressione costante sopra di un piano, è l' intera pressione sopra la proiezione del piano in quello cui l' asse è normale.*

Sia p la pressione ed a il piano sul quale essa è costante, sarà ap il quantitativo di pressione sul piano, e se α è l'angolo che fa p coll'asse delle x, sarà $ap\cos\alpha$ la componente del detto quantitativo secondo l'asse delle x; ma essendo α l'angolo fatto dalla normale p ad a, e dall'asse delle x normale al piano delle yz sarà l'angolo formato da questi due piani e perciò $a\cos\alpha$ sarà la proiezione a' di a sul piano delle yz; dunque la componente secondo l'asse delle x del quantitativo di pressione ap sarà $a'p$ che è l' intera pressione p sulla proiezione a' di a nel piano cui l' asse delle x è normale.

15. **Espressione in calcolo del totale delle forze dalle quali è animata una molecola qualunque di fluido.** Sia un fluido in quiete animato da forze qua-

lunque, esprimiamo in calcolo il totale delle forze dalle quali è animata una delle sue molecole. Questo fluido si riferisca a tre assi ortogonali posti in guisa che quelli delle x, y siano orizzontali ed al di sopra del fluido e l'asse delle z sia verticale all'ingiù. Si consideri in esso una molecola infinitesima parallelepipeda rettangolare coi tre spigoli paralleli ai tre assi. In questo parallelepipedo il vertice dell'angolo triedro più vicino all'origine delle coordinate abbia le coordinate x, y, z; la pressione a questo punto sia p, e la densità q. Da qualunque numero, direzione e intensità di forze sia animato questo punto, colla composizione e decomposizione si potranno ridurre a tre parallele ai tre assi le quali esprimeremo per X, Y, Z, tendenti ad aumentare le coordinate, perchè il caso opposto nel risultamento del calcolo sarà indicato dal segno negativo, o se l'ipotesi sia contraria, si esprimerà col segno negativo di queste quantità.

Secondo la varia località della molecola nel fluido, potranno variare la pressione, la densità e le forze, dunque queste quantità dipendono dalla località o dalle coordinate e quindi generalmente sono funzioni di queste.

16. Per la località stabilita alla molecola i tre spigoli sono dx, dy, dz, dunque il suo volume sarà $dxdydz$. Per determinare il resto conviene stabilire un principio di calcolo infinitesimale ed è che « *una funzione non* » *cambia di valore nel tratto infinitesimo della variazione* » *delle sue variabili*. Posto ciò non variando nè la q, nè le X, Y, Z, nel tratto di tutto il parallelepipedo che si trova dentro i limiti infinitesimi dx, dy, dz, la massa sarà $qdxdydz$, tutti i punti del nostro parallelepipedo saranno animati dalle forze X, Y, Z, e i quantitativi di forze paralleli ai tre assi saranno

$$qXdxdydz,\quad qYdxdydz,\quad qZdxdydz$$

quantità esprimenti il totale delle forze intrinseche dalle quali è animato il parallelepipedo.

17. Andiamo alle estrinseche. Tutti i punti della faccia rettangolare superiore $dxdy$ sono dentro i limiti dx, dy dunque per tutti la pressione é la stessa p, quindi $pdxdy$ sarà la pressione in quella faccia e dovendo esserle normale e agente verso l'interno, sarà parallela all'asse delle z e tendente ad aumentare le z. La faccia $dxdy$ parallela alla prima viene dopo la dz, i suoi punti sono dentro i limiti dx, dy, ma vengono dopo il dz; onde per questi la pressione sarà cresciuta per l'incremento infinitesimo di z, e perciò sarà la p più il suo differenziale relativamente alle z ossia $p+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz$, e la totale pressione contro la detta faccia sarà $\left(p+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz\right)dxdy$ la quale sarà parallela all'asse delle z e agente in su; abbiamo così due forze secondo le z, cioè: $pdxdy$, $\left(p+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz\right)dxdy$, la prima tendente ad accrescere, l'altra a diminuire, perciò sottraendo l'una dall'altra, il residuo $\left(\frac{dp}{dz}\right)dxdydz$ esprimerà la totale pressione secondo le z tendente a diminuirle: ma $qZdxdydz$ è la forza intrinseca parallela alle z e tendente ad aumentarle quindi $qZdxdydz-\left(\frac{dp}{dz}\right)dxdydz$, o

$$\left[qZ-\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]dxdydz$$

esprimerà la totale forza del parallelepipedo parallela all'asse delle z e tendente ad aumentare le medesime. Per gli altri due assi si farà il cambiamento analogo dentro la parentesi, e così le forze del parallelepipedo secondo le x e le y, tendenti ad aumentare queste coordinate saranno

$$\left[qX-\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]dxdydz\ ,\ \left[qY-\left(\frac{dp}{dy}\right)\right]dxdydz.$$

18. **In altra maniera si trova il totale delle forze.** Risolviamo in altra maniera lo stesso problema, supponendo altra dimensione e configurazione del fluido. Ritenendo la stessa posizione degli assi coordinati, s' immagini entro il fluido una superficie infinitesima ds per la quale le coordinate siano x, y, z, e nella quale sia p la pressione, q la densità ed X, Y, Z, le tre forze secondo i tre assi, alle quali siano ridotte tutte le forze dalle quali è animata la detta superficieola. Dal contorno di questa ds si conducano rette parallele all'asse delle x fino ad un determinato punto dove si trovino al contorno di una superficie ds'_0 ed a questa superficie la pressione sia p'_0. Dal contorno della stessa ds si conducano rette parallele all' asse delle y e poi all' asse delle z, e siano ds''_0, ds'''_0; p''_0 p'''_0 le superficie contornate dai due sistemi di rette e le pressioni su di esse. Si avverta che le direzioni dei tre sistemi di rette s'intende che vadano verso i piani coordinati, talchè per esempio il sistema delle rette parallele all' asse delle x vada verso il piano delle yz. Determiniamo i tre quantitativi di forze dalle quali sono animati i tre prismi di fluido circoscritti dai tre sistemi di rette e dalle superficieole estreme; forze rispettivamente parallele agli assi cui sono parallele le rette circoscriventi. Consideriamo il prisma parallelo all'asse delle x. L'ordinata x di ds cresca di dx avremo un aumento infinitesimo del prisma in proposito. Esprimendosi per a la sezione normale alle rette contornanti il prisma, adx sarà il volume dell'aumento, $aqdx$ la sua massa, ed $aqXdx$ tutta la forza intrinseca che lo anima parallelamente all'asse delle x: dunque $a\int qXdx$ è la somma delle forze intrinseche parallele all'asse delle x dalle quali è animato il prisma in proposito. Egli è facile poi vedere che a è la comune pro-

iezione sul piano delle yz di ds e ds'_o. Quindi pel primo Teorema (§. 14.) le componenti delle pressioni ps, $p'_o s'_o$ secondo l' asse delle x saranno ap, ap'_o, la prima agirà contrariamente alle x, e la 2ª nel loro senso; quindi $ap'_o - ap$ sarà la pressione secondo le x che animerà il prisma; ma abbiamo che anche $a\int qX\mathrm{d}x$ anima il prisma secondo le x tendendo ad aumentarle (§. 16.) dunqne

$$ap'_o - ap + a\int qX\mathrm{d}x$$

sarà il totale delle forze dalle quali è animato il prisma secondo le x. Se b e c siano le sezioni normali agli altri due prismi, le forze dalle quali saranno essi animati parallelamente alle y ed alle z saranno

$$bp''_o - bp + b\int qY\mathrm{d}y,$$

$$cp'''_o - cp + c\int qZ\mathrm{d}z.$$

19. **Figura e valore del volume della molecola infinitamente poco traslocata**. Per determinare la figura e poi il valore del volume della molecola infinitesima parallelepipeda rettangolare, quando essa per un moto reale o ipotetico si sposti infinitamente poco dalla sua prima situazione: si ritengano le coordinate superiori per la detta molecola, ed inoltre si dicano u, v, w, le velocità secondo i tre assi, alle quali colla decomposizione e composizione si riduca la velocità che ha la molecola in un tempo t in un dato collocamento di coordinate x, y, z. S'immagini la molecola traslocata di un tratto infinitesimo. Il punto più vicino della molecola alla origine delle coordinate ha nel tempo t per coordinate x, y, z. Si cerchino ora le coordinate dello stesso nel suo traslocamento infinitesimo. Queste coordinate saranno le primitive più gli spazi infinitesimi percorsi dal detto punto secondo i tre assi, ma dalla Mec-

canica questi spazi sono udt, vdt, wdt, dunque le coordinate cercate saranno $x+udt$, $y+vdt$, $z+wdt$, le quali saranno ancora le coordinate del principio traslocato di dx, dy e dz. Conoscendo le coordinate del principio di dx traslocato cerchiamo quelle dell'estremo di dx traslocato.

Le coordinate di questo estremo nella sua prima posizione erano $x+dx$, y, z; dunque le coordinate di esso traslocato, saranno queste stesse più gli spazi infinitesimi da esso percorsi secondo i tre assi. Per avere questi spazi basterà trovare le velocità di quell'estremo, perchè moltiplicate per dt, daranno gli spazi richiesti. Le velocità del principio di dx sono u, v, w, ora come l'estremo di dx differisce dal principio per dx, così le velocità di questo estremo differiranno dalle velocità del principio per la variazione infinitesima di x, dunque le cercate velocità saranno

$$(a) \qquad u+\left(\frac{du}{dx}\right)dx,\; v+\left(\frac{dv}{dx}\right)dx,\; w+\left(\frac{dw}{dx}\right)dx\,,$$

perciò i spazi domandati saranno

$$\left[u+\left(\frac{du}{dx}\right)dx\right]dt, \left[v+\left(\frac{dv}{dx}\right)dx\right]dt, \left[w+\left(\frac{dw}{dx}\right)dx\right]dt$$

alle quali aggiunte le coordinate $x+dx$, y, z, daranno le coordinate dell'estremo di dx traslocato. Sottraendo da queste le analoghe del suo principio i residui

$$dx\left(1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt\right),\; \left(\frac{dv}{dx}\right)dxdt\,,\; \left(\frac{dw}{dx}\right)dxdt$$

saranno le proiezioni della dx traslocata, sopra i tre rispettivi assi; quindi per la Geometria analitica questa lineola sarà

$$dx\sqrt{\left[\left(1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dt^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2dt^2\right]}$$

sviluppando in serie e trascurando gl'infinitesimi superiori al primo, la detta dx traslocata sarà

$$dx\left(1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt\right)$$

ma questa è la stessa sua proiezione, dunque la dx traslocata è parallela all'asse delle x.

Ragionando allo stesso modo per avere gli spigoli traslocati dy, dz, avremo i loro valori

$$dy\left(1+\left(\frac{dv}{dy}\right)dt\right),\ dz\left(1+\left(\frac{dw}{dz}\right)dt\right)$$

i quali essendo le proiezioni di dy e dz traslocati sopra i rispettivi assi, saranno ancora le dette lineole parallele ai detti assi, quindi la molecola traslocata sarà pure un parallelepipedo rettangolare coi tre spigoli non paralleli uguali ai valori trovati.

20. Moltiplicando i valori antecedenti il volume del parallelepipedo traslocato sarà

$$dxdydz\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt\right]\left[1+\left(\frac{dv}{dy}\right)dt\right]\left[1+\left(\frac{dw}{dz}\right)dt\right]$$

e facendo le moltiplicazioni col ritenere solo gli infinitesimi di primo ordine, il detto volume sarà

$$dxdydz\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt+\left(\frac{dv}{dy}\right)dt+\left(\frac{dw}{dz}\right)dt\right]$$

e quindi la variazione del volume nel traslocamento sarà

$$dxdydz\left[\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)\right]dt.$$

21. **Coordinate dell'estremità degli spigoli della molecola traslocata, e variazioni del suo volume date in coordinate.** Le coordinate delle estremità degli spigoli non paralleli traslocati e la variazione del suo vo-

lume possono essere dati in sole coordinate, escludendo le velocità. Infatti abbiamo dalle Teorie del moto

$$(b)\qquad u=\frac{dx}{dt}\,,\; v=\frac{dy}{dt}\,,\; w=\frac{dz}{dt}\,,$$

dunque basterà porre questi valori delle velocità tanto nelle dette coordinate, che nella variazione del volume; ma in queste sostituzioni s' incontreranno differenziali di diverse relazioni comechè dello stesso valore infinitesimo. Infatti i differenziali delle velocità (*a*) (se ben ci ricorderemo del discorso che si faceva per lo scopo) erano variazioni di valore passando dal principio dello spigolo al suo termine, cioè passando da un punto all'altro del sistema fluido, ma nelle nostre formole di velocità (*b*) si parla di moto nello spazio, quindi il principio degli spigoli s'intende muoversi nello spazio parallelamente ai tre assi; talchè la differenziazione sulle coordinate in dette velocità non riguarda il sistema, e non è obbligata alle condizioni delle coordinate nel sistema, e perciò è un differenziale di altra natura, comechè della stessa grandezza, e quindi si dirà variazione e si esprimerà col δ. Onde la differenziazione per d riguarda il passaggio da un punto ad un altro del sistema, e quella per δ il traslocamento d'un punto nello spazio. Così poi in natura differiscono questi due differenziali, che l'integrale è per i differenziali, perchè somma gli elementi di un sistema o fisico o geometrico o di puro computo, e non è affatto per le variazioni di moto. Posta questa riflessione i valori delle velocità saranno

$$u=\frac{\delta x}{\delta t}\,,\; v=\frac{\delta y}{\delta t}\,,\; w=\frac{\delta z}{\delta t}$$

ed anche il dt che si trova di sopra nelle coordinate dei punti traslocati e nella variazione del volume dovrà cambiarsi in δt.

22. Le due specie dei detti differenziali, sono tanto indipendenti fra loro, come è chiaro, che qualora si abbia un differenziale di variazione o una variazione di differenziale si può scrivere inversamente il d innanzi il δ, o il δ innanzi il d. Abbiamo veduto che le coordinate dell'estremo di dx traslocato sono

$$x+dx+udt+\left(\frac{du}{dx}\right)dxdt\,,\ y+vdt+\left(\frac{dv}{dx}\right)dxdt\,,$$

$$z+wdt+\left(\frac{dw}{dx}\right)dxdt\,:$$

dunque ponendo invece di dt, δt ed i valori antecedenti di u, v, w; le dette coordinate saranno

$$x+dx+\delta x+\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx\,, y+\delta y+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)dx,$$

$$z+\delta z+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)dx,$$

ove in luogo di udt si è posto δx invece di dx perchè è variazione di coordinata pel traslocamento del punto: il cambiamento poi del volume nel suo traslocamento sarà

$$dxdydz\left[\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)\right].$$

Se si volessero le coordinate degli estremi di dy, dz si troverebbero con facilità essere

$$x+\delta x+\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)dy,\ y+dy+\delta y+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)dy\,,$$

$$z+\delta z+\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)dy\,;$$

$$x+\delta x+\left(\frac{d\delta x}{dz}\right)dz\,,\ y+\delta y+\left(\frac{d\delta y}{dz}\right)dz\,,$$

$$z+dz+\delta z+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)dz\,.$$

23. **Le variazioni delle coordinate sono funzioni di tutte e tre le coordinate stesse.** Da queste e dalle superiori coordinate degli estremi dei tre spigoli, si vede, che le singole variazioni delle tre coordinate sono funzioni di tutte insieme le tre coordinate, perchè in essa nella variazione di ciascuna coordinata è preso il differenziale rispetto ciascuna, per esempio si trova

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx,\ \left(\frac{d\delta y}{dy}\right)dy\ ,\ \left(\frac{d\delta z}{dz}\right)dz$$

Ma questo che abbiamo veduto da un fatto di calcolo, si può facilmente dimostrare col raziocinio. Infatti gli spazietti che descrivono i diversi punti del sistema o le variazioni delle loro coordinate nel traslocamento dipendono dalla località di detti punti, perchè secondo le diverse forze, che agiscono ne' vari punti, secondo gli ostacoli che essi trovano, ec. i detti spazi possono variare, dunque questi dipendono dalla località dei punti o dalle coordinate, ossia i detti spazi o le variazioni delle coordinate sono funzioni delle coordinate stesse.

24. **Si calcolano a priori le coordinate dei punti traslocati.** Posto ciò possiamo trovare le coordinate dei punti traslocati indipendentemente dalle formole del moto e date per mezzo delle coordinate stesse.

Essendo x, y, z le coordinate del principio del parallelepipedo nel suo primo collocamento, saranno $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ le coordinate del detto punto traslocato d' infinitamente poco. All'estremo di dx appartengono le coordinate $x+dx$, y, z, al suo traslocamento apparterranno le stesse

coordinate più le variazioni per il suo moto proprio, dunque pel moto del principio le dette coordinate dovranno crescere di δx, δy, δz; e per avere gli incrementi relativi al traslocamento di quell'estremo si rifletterà che come quell' estremo differisce dal principio per un differenziale di x, così le variazioni dell'estremo, differiranno dalle variazioni del principio dei differenziali di queste variazioni differenziate rispetto l'x e che perciò saranno espresse da

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx\,,\ \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)dx\,,\ \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)dx\,;$$

dunque le coordinate dell'estremo traslocato sono

$$x+dx+\delta x+\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx,\, y+\delta y+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)dx,\ z+\delta z+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)dx.$$

25. Per familiarizzarci un poco nell'esprimere le coordinate degli estremi degli spigoli traslocati, troviamo le coordinate del punto del parallelepipedo il più distante dall'origine delle coordinate traslocato. A questo appartengono nel suo primo collocamento le coordinate $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Le coordinate del suo traslocamento saranno quelle della sua prima posizione, aumentate delle variazioni δx, δy, δz, del primo punto, e delle variazioni del traslocamento del punto in proposito. Ora come questo punto differisce dal primo per i differenziali dx, dy, dz, così δx, δy, δz, differianno dalle variazioni del primo punto per i loro differenziali parziali relativi alle dette coordinate; quindi le variazioni del detto punto saranno

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\delta x}{dz}\right)dz\,,$$

$$\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\delta y}{dz}\right)dz\,,$$

$$\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)dz\,;$$

perciò le coordinate del punto traslocato saranno

$$x+\delta x+dx+\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\delta x}{dz}\right)dz\,,$$

$$y+\delta y+dy+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\delta y}{dz}\right)dz\,,$$

$$z+\delta z+dz+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)dz\,.$$

Con queste coordinate si tornerà ad avere la variazione del volume espresso per le medesime eseguendo le operazioni fatte colle coordinate date in velocità (§. 19. 20.).

Per chiudere il trattato d' Idrodinamica esprimiamo in calcolo la compressibilità ed incompressibità dei fluidi.

26. **Espressione in calcolo della incompressibità e compressibilità dei fluidi**. Fluido incompressibile è quello di cui il volume non varia: per cui la variazione del volume, che trovasi essere

$$dxdydz\left[\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)\right],$$

eguagliata a zero esprimerà l'incompressibilità del fluido : la qual condizione si riduce a

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)=0$$

osservando che il fattore $dxdydz$ non può annullarsi.

27. Compressibile è quel fluido di cui il volume cambia, perciò la variazione del volume non potendo esser nulla, se il volume si prenda assolutamente la condizione per la compressibilità sarà

$$dxdydz\left[\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)\right]>0.$$

e più semplicemente.

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)>0$$

28. **Differenza fra la variazione del volume della molecola ottenuta col calcolo e col raziocinio sul traslocamento**. Non sarà inutile l'aggiungere una riflessione sulla variazione del volume

$$dydz\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx+dxdz\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)dy+dxdy\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)dz=\delta.dxdydz.(d)$$

(§. 22.). Se si fosse proposto di prendere astrattamente la variazione del prodotto $dxdydz$, differenziando per δ sarebbe stato $dydz\delta dx+dxdz\delta dy+dxdy\delta dz$. Ma nel caso concreto dove i δx, δy, δz sono funzioni delle tre coordinate, questo risultamento è erroneo. Infatti i differenziali delle variazioni in questo risultamento sono totali, mentre debbono essere parziali relativamente alle singole coordinate, come si scorge nella (d) trovata col sussidio del raziocinio fatto sul traslocamento della molecola fluida (§. 20, 22).

29. **Dilatazione e condensazione d'un liquido.** Riferiamo secondo il solito tutti i punti del fluido a tre assi rettangolari, e supponiamo che una molecola che in un tempo t ha le coordinate x, y, z in un tempo antecedente abbia avuto le coordinate $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$. Se si prendono x, y, z per variabili indipendenti, le ξ, η, ζ saranno funzioni di x, y, z che serviranno a misurare i traslocamenti del punto che si considera, traslocamenti relativi ai tre assi. Sia r la distanza delle molecole m, m', nel tempo t, alle quali appartengano le coordinate x, y, z e $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, dove si trovano le variazioni, perchè la posizione attuale rispettiva delle molecole proviene dal loro traslocamento. Per ciò che si è posto avremo $r^2=\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2$. Ora la prima molecola nel tempo antecedente aveva le coordinate $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$: dun-

que ponendo queste coordinate rispettivamente nelle coordinate $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ della seconda m', ed avvertendo che ξ, η, ζ sono funzioni di x, y, z avremo per le coordinate della seconda molecola nel tempo antecedente

$$x+\delta x-\left(\xi+\frac{d\xi}{dx}\delta x+\frac{d\xi}{dy}\delta y+\frac{d\xi}{dz}\delta z\right),$$

$$y+\delta y-\left(\eta+\frac{d\eta}{dx}\delta x+\frac{d\eta}{dy}\delta y+\frac{d\eta}{dz}\delta z\right),$$

$$z+\delta z-\left(\zeta+\frac{d\zeta}{dx}\delta x+\frac{d\zeta}{dy}\delta y+\frac{d\zeta}{dz}\delta z\right):$$

quindi se si esprime per $\frac{r}{1+\varepsilon}$ la distanza primitiva sarà

$$(1)\quad \left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)^2=\left(\delta x-\frac{d\xi}{dx}\delta x-\frac{d\xi}{dy}\delta y-\frac{d\xi}{dz}\delta z\right)^2$$
$$+\left(\delta y-\frac{d\eta}{dx}\delta x-\frac{d\eta}{dy}\delta y-\frac{d\eta}{dz}\delta z\right)^2$$
$$+\left(\delta z-\frac{d\zeta}{dx}\delta x-\frac{d\zeta}{dy}\delta y-\frac{d\zeta}{dz}\delta z\right)^2.$$

Siano α, β, γ gli angoli che il raggio vettore r da m ad m' fa coi tre assi, avremo $\delta x=r\cos\alpha$, $\delta y=r\cos\beta$, $\delta z=r\cos\gamma$, e sostituendo questi valori nell'equazione (1) e dividendo per r avremo

$$(2)\quad \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2=\left(\cos\alpha-\frac{d\xi}{dx}\cos\alpha-\frac{d\xi}{dy}\cos\beta-\frac{d\xi}{dy}\cos\gamma\right)^2$$
$$+\left(\cos\beta-\frac{d\eta}{dx}\cos\alpha-\frac{d\eta}{dy}\cos\beta-\frac{d\eta}{dz}\cos\gamma\right)^2$$
$$+\left(\cos\gamma-\frac{d\zeta}{dx}\cos\alpha-\frac{d\zeta}{dy}\cos\beta-\frac{d\zeta}{dz}\cos\gamma\right)^2.$$

La quantità $1+\varepsilon$ è il rapporto fra le distanze r ed $\frac{r}{1+\varepsilon}$ delle molecole m, m' nelle loro posizioni dell'attuale tempo e del tempo antecedente, quindi il valore di ε servirà di misura a ciò che si può nominare *la dilatazione, o la condensazione lineare* del fluido secondo la direzione del raggio vettore r, cioè la dilatazione lineare se ε è una quantità positiva, e la condensazione o contrazione lineare se ε è negativa.

Supponiamo ora, che cominciando dal punto di coordinate x, y, z si prenda secondo la direzione r(che fa gli angoli α, β, γ coi tre assi) una retta di lunghezza $1+\varepsilon$, ed indichiamo con $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ le coordinate dell'altra estremità di questa lunghezza, si avrà

$$(3)\quad \frac{x'}{\cos\alpha}=\frac{y'}{\cos\beta}=\frac{z'}{\cos\gamma}=+(1+\varepsilon)$$

quindi la formola (2) diventerà

$$(4)\quad \left(x'-\frac{d\xi}{dx}x'-\frac{d\xi}{dy}y'-\frac{d\xi}{dz}z'\right)^2$$
$$+\left(y'-\frac{d\eta}{dx}x'-\frac{d\eta}{dy}y'-\frac{d\eta}{dz}z'\right)^2$$
$$+\left(z'-\frac{d\zeta}{dx}x'-\frac{d\zeta}{dy}y'-\frac{d\zeta}{dz}z'\right)^2,=1.$$

Questa equazione è quella d'una ellissoide nella quale le rette condotte dal suo centro alla superficie esprimono il rapporto $1+\varepsilon$ delle dilatazioni o condensazioni nelle diverse direzioni intorno al punto di coordinate x, y, z. Si chiameranno *dilatazioni*, o *condensazioni principali* quelle che corrispondono ai tre assi dell'ellissoide tra le quali si trovano le dilatazioni, o condensazioni massima, e minima. Le al-

tre si trovano uniformemente distribuite intorno ai tre assi dell'ellissoide.

Dalle equazioni (2) (4) si possono facilmente dedurre i valori di ε, α, β, γ che corrispondono alle dilatazioni o condensazioni lineari principali. Perciò si ponga

$$(5)\quad \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2=\theta,$$

$$(6)\quad \begin{cases} A=\left(\frac{d\xi}{dx}-1\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2, \\ B=\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dy}-1\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2, \\ C=\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dz}-1\right)^2, \end{cases}$$

$$D=\frac{d\xi}{dy}\frac{d\xi}{dz}+\left(\frac{d\eta}{dy}-1\right)\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\left(\frac{d\zeta}{dz}-1\right),$$

$$E=\frac{d\xi}{dz}\left(\frac{d\xi}{dx}-1\right)+\frac{d\eta}{dz}\frac{d\eta}{dx}+\left(\frac{d\zeta}{dz}-1\right)\frac{d\zeta}{dx},$$

$$F=\left(\frac{d\xi}{dx}-1\right)\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\left(\frac{d\eta}{dy}-1\right)+\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\zeta}{dy};$$

se queste si sostituiscono nelle equazioni (2), (4) diverranno

$$(7)\quad \theta=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma$$
$$+2D\cos\beta\cos\gamma+2E\cos\gamma\cos\alpha+2F\cos\alpha\cos\beta$$

$$(8)\quad Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dy'z'+2Ez'x'+2Fx'y'=1$$

Ora si sa dalla teoria dell'ellissoide, l'equazione della quale è la (8), che il raggio vettore condotto dal centro allora è normale alla superficie o è uno degli assi principali quando esistono l'equazioni

$$(9)\quad \frac{A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma}{\cos\beta}$$
$$=\frac{E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma}{\cos\gamma};$$

Or quando sussiste questa uguaglianza di frazioni o le stesse moltiplicate nei due termini di ciascuna rispettivamente per $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, la somma dei numeratori, divisa per la somma dei denominatori deve essere uguale ad una di dette frazioni : dunque

$$\frac{(A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma)\cos\alpha+(F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma)\cos\beta}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}$$

$$+\frac{(E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma)\cos\gamma}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=\frac{A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma}{\cos\alpha}:$$

ma il numeratore del primo membro è l'equazione (7) ed il denominatore è uguale all'unità , dunque il suo valore è θ, quindi

$$(10)\quad \theta=\frac{A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma}{co\beta}$$

$$=\frac{E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma}{\cos\gamma}$$

Or da queste equazioni e dalla $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ avremo le quantità θ, α, β, γ che sono relative alle condensazioni, e dilatazioni principali.

Dalle equazioni (10) ricaveremo sull' istante

$$(A-\theta)\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma=0, F\cos\alpha+(B-\theta)\cos\beta+D\cos\gamma=0,$$

$$(11)\quad E\cos\alpha+D\cos\beta+(C-\theta)\cos\gamma=0.$$

Eliminando da queste equazioni le quantità α, β, γ avremo

$$(12)\quad (A-\theta)(B-\theta)(C-\theta)-D^2(A-\theta)$$

$$E^2(B-\theta)-F^2(C-\theta)+2DEF=0$$

Siano θ', θ'', θ''' le tre radici di questa equazione ed ε', ε'', ε''' i valori corrispondenti poichè si è posto (5) $\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2=\theta$ ricaveremo

$$(13)\quad \varepsilon'=\frac{1}{\sqrt{\theta'}}-1,\ \varepsilon''=\frac{1}{\sqrt{\theta''}}-1,\ \varepsilon'''=\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}-1,$$

e ciascuna delle tre quantità ε', ε'', ε''' rappresenterà una dilatazione principale quando sarà positiva, ed una condensazione principale quando sarà negativa. Di più abbiamo per l'equazione (12) $\theta' + \theta'' + \theta''' = A + B + C$

$$\theta'''\theta' + \theta''\theta''' + \theta''\theta' = BC + CA + AB - D^2 - E^2 - F^2,$$

$$(14)\ \theta'\theta''\theta''' = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF.$$

Se si suppone che gli assi coordinati siano paralleli alle rette condotte pel punto x, y, z e corrispondenti alle dilatazioni, e condensazioni lineari principali l'equazione (8) rappresenterà una ellissoide riferita non solo al suo centro ma ancora ai suoi assi, dunque dovendo contenere solo le seconde potenze delle coordinate avremo (15) $D=0$, $E=0$, $F=0$:

quindi l'equazione(12)si riduce ad(15)$(A-\theta)(B-\theta)(C-\theta)=0$ e $\theta' = A$, $\theta'' = B$, $\theta''' = C$, e perciò l'equazione (7) ci darà $\theta = \theta'\cos^2\alpha + \theta''\cos^2\beta + \theta'''\cos^2\gamma$ ossia sostituendovi i valori di θ, θ', θ'', θ''' ricavati dalla (5) e dalla (13) sarà

$$(16)\ \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{\cos\alpha}{1+\varepsilon'}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{1+\varepsilon''}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{1+\varepsilon'''}\right)^2$$

Questa equazione (16) servo a dedurre la dilatazione, o condensazione misurata secondo un' asse qualunque dalle dilatazioni, e condensazioni principali misurate secondo tre assi che si segano ad angoli retti quando si conoscono gli angoli α, β, γ che il primo asse fa cogli altri tre.

30 Oltre le condensazioni, e dilatazioni lineari di cui abbiamo parlato si può trovare la dilatazione, e condensazione di un elemento infinitesimo di volume che si trova al punto di coordinate (x, y, z). Supponiamo dunque che per una circostanza qualunque questo elemento abbia variato nella ragione di 1 a $1+v$. Il valore di v servirà precisamente a misurare ciò che si chiama *dilatazione*, *o con-*

densazione di volume, cioè la dilatazione del volume se v sia positivo, la condensazione se v è negativa. Ora questa quantità v si conosce quando si conoscano i valori di ε', ε'', ε''' dilatazioni lineari principali.

Infatti supponiamo, che l'elemento infinitesimo di volume sia nel primo stato del fluido di figura sferica di raggio infinitesimo r, perchè l' infinitesimo può avere una qualunque figura; allora questo elemento sarà $\frac{4}{3}\pi r^3$. Prendendo poi pel cambiamento la figura di una elissoide di cui i tre assi sono $r(1+\varepsilon')$, $r(1+\varepsilon'')$, $r(1+\varepsilon''')$ il suo volume sarà $\frac{4}{3}\pi r^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')$: ma essendo il volume primitivo al cambiato come 1 ad $1+v$ sarà

$$\frac{1+v}{1}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

o (17) $1+v=(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon''')=\frac{1}{\sqrt{(\theta'\theta''\theta''')}}$ e combinando questa equazione colla (14) avremo

$$(18)\quad \left(\frac{1}{1+v}\right)^2=ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF$$

Ammettiamo ora che ξ, η, ζ, ε, v, ε', ε'' ε''' siano tutte quantità infinitesime, trascurando gl'infinitesimi di secondo ordine dalle equazioni (6) abbiamo

$$(19)\quad A=1-2\frac{d\xi}{dx},\ B=1-2\frac{d\eta}{dy},\ C=1-2\frac{d\zeta}{dz}$$

$$D=-\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right),\ E=-\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right),$$

$$F=-\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right).$$

Se queste quantità si sostituiscono nella (18) non ritenendo che gl'infinitesimi di primo ordine avremo

$$v=\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz};$$

ora ξ, η, ζ sono le variazioni infinitesime delle coordinate, dunque $\xi=\delta x$, $\eta=\delta y$, $\zeta=\delta z$ quindi

$$v=\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}$$

ove siamo ritornati ad aver la variazione del volume.

Se si prende l'equazione (16) e si facciano gli sviluppi delle potenze negative — 2 coll' avvertenza di trascurare gl' infinitesimi di secondo ordine sarà $\varepsilon=\varepsilon'\cos^2\alpha+\varepsilon''\cos^2\beta+\varepsilon'''\cos^2\gamma$: dalla quale si ha una dilatazione qualunque lineare dalle dilatazioni lineari principali quando si conoscano gli angoli che fa il raggio vettore secondo cui è la prima dilatazione, coi detti assi principali.

PARTE SECONDA

IDROSTATICA

CAPO I.

Formola generale dell'equilibrio.

1. L' equilibrio di un sistema di forze in un fluido è l'equilibrio di un sistema di forze in una molecola elementare. Infatti supposto che nella molecola qualunque si siano considerate le forze intrinseche ed estrinseche si deve prescindere dal fluido ambiente, perchè espresso dalle forze estrinseche di pressione, e perchè affatto slegato dalla molecola.

2. Ora abbiamo trovate (§. 17.) l'espressioni delle forze intrinseche ed estrinseche di una molecola qualunque infinitesima parallelepipeda rettangolare, e perciò elementare, le quali sono

$$\left[qX-\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]dxdydz\ ,\ \left[qY-\left(\frac{dp}{dy}\right)\right]dxdydz\ .$$

$$\left[qZ-\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]dxdydz\ ,$$

Questo è un sistema di tre forze rettangolari applicate ad un punto materiale perfettamente mobile; quindi perchè sia

in equilibrio, si richiede che le tre forze si annullino parzialmente.

3. Uguagliando a zero le tre forze, prescindendo dal fattore $dxdydz$, avremo

$$qX-\left(\frac{dp}{dx}\right)=0\,,\;qY-\left(\frac{dp}{dy}\right)=0\,,\;qZ-\left(\frac{dp}{dz}\right)=0.$$

Trasportando i negativi, moltiplicando rispettivamente per dx, dy, dz, e sommando avremo

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)dx+\left(\frac{dp}{dy}\right)dy+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz=q(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Il primo membro è la somma de'differenziali parziali rispetto tutte le variabili, di cui è funzione la p, sarà dunque

$$dp=q(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Questa è l'equazione d'equilibrio di un sistema di forze in una molecola qualunque, di qualunque fluido perchè è data per le coordinate x, y, z; e perchè secòndo che q sarà costante o variabile, il fluido sarà incompressibile o compressibile. In ultimo la detta equazione comprende tutte le forze che possono agire in una molecola cioè le intrinseche X, Y, Z e la pressione p.

4. **Altra maniera di aver l'equazione generale dell'equilibrio dei fluidi.** La stessa equazione si può ottenere dalle formole avute al §. 18. Egli è evidente che per l'equilibrio della molecola situata nel punto (x, y, z) si richiede non potersi muovere i detti prismi parallelamente agli assi ai quali sono paralleli, si richiede perciò che siano zero le forze che tendono a muovere i prismi parallelamente agli assi, dunque

$$p'_{\circ}a-pa+a\int qXdx=0$$

$$p_0''b - pb + b\int q\,\mathrm{Y}dy = 0$$

$$p_0'''c - pc + c\int q\,\mathrm{Z}dz = 0$$

differenziando rispettivamente per x, y, z, e sommando avremo come sopra

$$dp = q(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) .$$

5. **Pressioni del fluido pesante contro i corpi immersi, e contro i corpi ambienti.** Le formole avute col considerare le forze in un prisma di fluido di due dimensioni infinitesime servono per trovare la risultante delle pressioni di un fluido pesante ed in quiete contro un corpo immerso e contro un corpo ambiente, come un vase.

Essendo gli assi delle x e delle y orizzontali e quello delle z verticale all' ingiù, nel caso del fluido pesante non ci saranno forze orizzontali, quindi $\mathrm{X}=0$, $\mathrm{Y}=0$; la Z poi forza verticale all'ingiù sarà la gravità, che diremo *uno*, e perciò $a\int q\mathrm{X}dx, b\int q\mathrm{Y}dy$ forze intrinseche orizzontali saranno zero; ed $\int q\mathrm{Z}dz$ sarà $\int q dz$. Posto ciò le formole dell'equilibrio saranno

$$p'_0a - pa = 0,\ p''_0b - pb = 0,\ p'''_0c - pc = c\int q dz.$$

Supponiamo il corpo immerso e che ds sia alla superficie di questo corpo. Si supponeva che dal contorno di ds, si conducessero rette rispettivamente parallele ai tre assi per circoscrivere tre prismi di fluido: ora si consideri che queste rette passino a traverso del corpo a circoscrivere tre prismi che terminino alla parte opposta di ds, dove siano le pressioni p'_0, p''_0, p'''_0. È evidente che essendo $p_0'a = pa$ e $p_0''b = pb$ le pressioni orizzontali che risente il corpo alla sua superficie si distruggono, e perciò il corpo immerso non può concepire per queste pressioni moti orizzontali. La

terza differenza $p_0'''c - pc$ esprime la pressione all'insù che risente il cilindro verticale scavato nel corpo; e questa differenza è uguale a $c\int q dz$, che è il peso di fluido di volume eguale al detto prisma.

Se s' immagini il corpo diviso in tanti prismi verticali siegue dalla terza formola, che la risultante delle totali pressioni all' insù, che risente il corpo immerso, equivale alla somma dei pesi dei prismi di fluido di volume uguale ai prismi in cui fu diviso il corpo: ossia, è uguale al peso del fluido scacciato dal corpo immerso.

6. La risultante della somma dei pesi dei prismi del fluido passa pel punto che era centro di gravità del fluido scacciato mentre che il peso del corpo si considera come riunito nel suo centro di gravità; dunque il corpo si riduce semplicemente al suo peso applicato al suo centro di gravità, e la risultante delle pressioni del fluido ambiente o il peso del fluido cacciato dal corpo che agisce all'insù, si può intendere applicata al centro di gravità del fluido scacciato di volume uguale al detto corpo.

Si vedrà facilmente dopo ciò che le pressioni orizzontali contro il corpo ambiente o recipiente sono uguali ed agiscono di dentro in fuori, e che la somma delle pressioni verticali è uguale al peso del fluido.

7. **Condizioni per l' equilibrio d' un corpo immerso e perchè un corpo sia galleggiante.** Affinchè il corpo immerso in un fluido sia in quiete si richiede che le due indicate forze, peso del corpo, e peso di un ugual volume di fluido applicati ai rispettivi centri di gravità siano uguali ed opposte: dunque i due centri di gravità dovranno essere nella stessa verticale, e il corpo immerso e fluido ambiente dovranno essere della stessa gravità specifica o densità. Mancando la prima condizione, il corpo immerso concepirà un moto rotatorio, finchè i due centri di gravità si pongano nella stessa verticale: mancando la seconda condizione

il corpo avrà moto progressivo dall' alto in basso, fino al fondo, quando la gravità specifica del fluido sia minore di quella del corpo; e dal basso in alto nel caso opposto: in questo caso sporgerà fuori del fluido di tanto, finchè la parte immersa scacci una massa di fluido che abbia il peso del corpo. Questo così collocato alla superficie del liquido si dice galleggiante.

8. **Condizioni per l'equilibrio d'un galleggiante.** Da ciò si vede che quando un corpo sia galleggiante debbono verificarsi due condizioni; la prima è che siano uguali i pesi del corpo e del fluido di volume uguale alla parte immersa; la seconda condizione è che i centri di gravità del fluido scacciato e del corpo siano nella stessa verticale, cioè nella retta normale alla superficie di livello.

CAPO II.

Dimostrazione della formola generale dell' equilibrio col principio e formola generale delle velocità virtuali.

9. **Formola generale delle velocità virtuali.** Questa formola ci dice che in ogni caso di equilibrio la somma dei momenti delle forze deve essere uguale a zero. Questi momenti sono ciascuno la forza applicata ad un punto, moltiplicata per la variazione della retta che comincia da questo punto e andando secondo la forza termina ad un punto fisso: per esempio $P\delta p$ è una forma di momento; perchè la P esprime la forza, e δp la variazione della retta p che deve cominciare dal punto di applicazione di P e andando secondo la P, termina ad un punto fisso.

Se la forza tende a diminuire la retta, si prende positiva la variazione di questa, perchè si considera la forza tendente al punto fisso della retta, come a centro, che è il caso della natura. Se poi la forza tende a crescere la detta

retta, la variazione di questa si prende negativa. Si vede che in questo caso la P e p, comechè comincino da uno stesso punto e siano in una stessa retta, vanno in senso opposto.

10. **Equazione generale dell'equilibrio dei fluidi per mezzo delle velocità virtuali.** Dopo ciò consideriamo la nostra molecola parallelepipeda; in questa

$$qX dx dy dz,\ qY dx dy dz,\ qZ dx dy dz$$

esprimono le forze intrinseche secondo i tre assi applicate ai punti di coordinate x, y, z. Queste sono tre rette che si trovano nella direzione delle tre forze indicate, le quali tendono ad aumentarle, quindi dovranno prendersi negative le loro variazioni, e perciò avremo i tre momenti

$$-qX dx dy dz \delta x, -qY dx dy dz \delta y, -qZ dx dy dz \delta z,$$

la somma dei quali

$$-q(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dx dy dz$$

esprimerà la somma dei momenti delle forze, dalle quali è animata la molecola; e l'integrale triplo di questa quantità per le tre dimensioni indipendenti sarà la somma dei momenti di tutto il fluido. Dunque per la formola generale dell'equilibrio espressa in velocità virtuali avremo

$$\mathrm{SSS}-q(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dx dy dz = 0 \qquad (1)$$

Ove si usa la S invece di $\int$ perchè è integrale definito.

Si deve ora esprimere la condizione della natura del fluido. Questo può essere incompressibile o compressibile. Ammettiamo il primo caso.

11. **S' introduce la condizione d'incompressibilità nell'equazione generale dell'equilibrio.** La condizione della incompressibilità è che la variazione del volume sia nulla, dunque (§. 26).

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)dx dy dz=0. \qquad (2)$$

Dovendo coesistere le equazioni (1), (2), per ridurle ad una, sarebbe necessaria una sostituzione da una equazione nella altra di una quantità comune. Sarà però meglio usare il metodo dei moltiplicatori, per ricavarne forze prodotte dalle date. Esprimendo pertanto questo moltiplicatore per λ, si moltiplichi per esso la seconda equazione, e si aggiunga alla prima; avremo per l'equilibrio del fluido, l'unica equazione

$$S\left\{-q\left(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z\right)\right.$$

$$\left.+\lambda\left[\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)\right]\right\}dx dy dz=0 \qquad (A)$$

Dove il segno integrale S indica l'integrale triplo.

12. **Integrazione fra i limiti dell'equazione generale.** Da questa equazione si prenda la parte

$$S\lambda\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx dy dz,$$

si faccia l'integrazione per parti, e si porti la parte integrata fra i due limiti, ponendo due accenti alle quantità che riguardano il limite il più lontano dall' origine delle coordinate, ed un accento a quelle che sono nel limite più vicino, avremo

$$S\lambda\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)dx dy dz=\left(\lambda''\delta x''-\lambda'\delta x'\right)dy dz-S\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)dx dy dz\delta x.$$

Analogamente sarà

$$S\lambda\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)dx dy dz=\left(\lambda''\delta y''-\lambda'\delta y'\right)dx dz-S\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)dx dy dz\delta y.$$

$$S\lambda\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)dxdydz=\left(\lambda''\delta z''-\lambda'\delta z'\right)dxdy-S\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)dxdydz\delta z.$$

Sostituendo i secondi membri di questa equazione nella equazione generale (A) avremo

$$\text{(B)}\quad S\left\{\left[-qX-\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)\right]\delta x+\left[-qY-\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)\right]\delta y\right.$$

$$\left.+\left[-qZ-\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)\right]\delta z\right\}dxdydz+$$

$$S\left[\left(\lambda''\delta x''-\lambda'\delta x'\right)dydz+\left(\lambda''\delta y''-\lambda'\delta y'\right)dxdz\right.$$

$$\left.+\left(\lambda''\delta z''-\lambda'\delta z'\right)dxdy\right]=0.$$

In questa equazione il primo integrale è triplo, perchè riguarda le tre dimensioni dx, dy, dz; il secondo è doppio, perchè si riferisce alle due dimensioni che sono i prodotti a due a due degli elementi dx, dy, dz. In questa equazione, essendo differenti i due integrali per aver lo zero debbono essere nulli separatamente, ossia devono essere separatamente nulle le quantità sotto i segni integrali; sarà perciò

$$\left[-qX-\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)\right]\delta x+\left[-qY-\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)\right]\delta y$$

$$+\left[-qZ-\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)\right]\delta z=0$$

$$\text{(C)}\quad\left(\lambda''\delta x''-\lambda'\delta x'\right)dydz+\left(\lambda''\delta y''-\lambda'\delta y'\right)dxdz$$

$$+\left(\lambda''\delta z''-\lambda'\delta z'\right)dxdy=0.$$

13. **Equazione generale dell'equilibrio dei fluidi incompressibili dedotta dalla formola generale delle velocità virtuali.** Nella prima equazione sono indipendenti le variazioni δx, δy, δz; onde sia verificata, debbono essere parzialmente zero i loro coefficienti, e perciò avremo

$$-\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)-qX=0,-\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)-qY=0,-\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)-qZ=0;$$

trasportando, moltiplicando rispettivamente queste equazioni per dx, dy, dz, e sommando avremo

$$-d\lambda=q\left(Xdx+Ydy+Zdz\right),$$

equazione generale dell'equilibrio dei fluidi.

14. **Si dimostra che il moltiplicatore della condizione è la pressione.** Non v' ha difficoltà nel riconoscere il λ come forza di pressione. Infatti nell'equazione dei momenti delle forze avevamo $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)dxdydz\delta x$ in questo prodotto, essendo δx la velocità virtuale, l'altro fattore

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)dxdydz,$$

(come si ha dalla Teoria generale delle velocità virtuali) deve essere la forza secondo la retta x che si può rappresentare per

$$\left[\lambda-\left(\lambda-\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)dx\right)\right]dydz.$$

La $dydz$, è la faccia sulla quale agisce la forza rappresentata dalla quantità entro parentesi, e questa è evidentemente la pressione agente contro la faccia stessa che si riduce appunto a $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$ dx come in altra dimostrazione si riduceva a $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx$. Che se nel nostro caso la $d\lambda$ è negativa mentre la dp era positiva, l'uno e l'altro caso può essere, perchè allo

stesso variare delle coordinate la pressione può crescere o decrescere.

15. **Considerazione sull'equazione ai due limiti.** L'equazione (C) che contiene la quantità fra i limiti si può porre sotto la forma

$$\text{(D)}\quad S\lambda''(\delta x''dydz+\delta y''dxdz+\delta z''dxdy)$$

$$=S\lambda'(\delta x'dydz+\delta y'dxdz+\delta z'dxdy)$$

Supponiamo che il limite del fluido il più lontano dalla origine, cui corrispondono le lettere con due accenti, sia libero; cioè che in esso la pressione λ'' sia zero, e che il limite più vicino all'origine avviluppi un solido: per la superficie di questo solido e del fluido a contatto avremo l'equazione

$$S\lambda'(\delta x'dydz+\delta y'dxdz+\delta z'dxdy)=0.$$

Si dica ds l'elemento della superficie in proposito che abbia per proiezione $dydz$ sul piano delle y, z e si dica α l'angolo che fa il piano ds col piano $dydz$, o l'angolo che la normale p a ds fa coll'asse delle x normale a $dydz$; per la geometria analitica avremo $dydz=ds\cos\alpha$. A rigore la ds sulli piani delle x; z; x, y non avrà le proiezioni $dxdz$, $dxdy$; ma trattandosi di infinitesimi nei quali non si fissa la grandezza assoluta, ma la relativa alle quantità finite, si può dire che la ds abbia per proiezioni i rettangoli testè indicati; dunque se si dicano β, γ gli angoli che la p normale a ds fa cogli assi delle y e delle z potremo porre

$$dxdz=ds\cos\beta,\quad dxdy=ds\cos\gamma.$$

Sostituendo queste quantità nella equazione superiore essa diventerà

$$S\lambda'(\delta x'\cos\alpha+\delta y'\cos\beta+\delta z'\cos\gamma)ds=0$$

Ora $\delta x' \cos\alpha + \delta y' \cos\beta + \delta z' \cos\gamma = \delta p$ (*) è la variazione della normale sul ds; dunque la nostra equazione diventa $S\left(\lambda' ds \delta p\right) = 0$. Il fattore $\lambda' ds$ è il quantitativo di pressione sopra il ds, e δp è la velocità virtuale nel senso della normale secondo cui agisce la pressione. La nostra equazione pertanto ci dice, che la somma dei momenti delle pressioni contro il corpo avviluppato dal liquido deve essere nulla, cioè che le forze dalle quali è animato il liquido in quiete contro il corpo immerso in quiete producono pressioni, i momenti delle quali sommati danno zero; la qual condizione ci dice che queste pressioni si equilibrano.

16. **Azione del fluido contro un corpo avviluppato e mobile.** Nella ipotesi del solido avviluppato dal fluido abbiamo tacitamente supposto la sua immobilità.

Supponiamo ora che sia perfettamente mobile, o che possa ad un tempo concepire i due moti, progressivo e rotatorio.

Dalla Meccanica delle velocità virtuali abbiamo che le equazioni

$$\delta\xi = \delta l + z\delta M - y\delta N$$

$$\delta\eta = \delta m - z\delta L + x\delta N$$

$$\delta\zeta = \delta n + y\delta L - x\delta M$$

esprimono le variazioni delle coordinate di un punto qualunque del mobile per un suo moto minimo composto di

(*) Abbiamo in genere per una retta r

$$\delta r = \left(\frac{x-a}{r}\right)\delta x + \left(\frac{y-b}{r}\right)\delta y + \left(\frac{z-c}{r}\right)\delta z.$$

Ora $\frac{x-a}{r}$, $\frac{y-b}{r}$, $\frac{z-c}{r}$ sono i coseni degli angoli che la retta fa coi tre assi, dunque se, come è nel nostro caso, questi coseni siano $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ cioè coseni degli angoli che la normale p fa coi tre assi, $\delta x\cos\alpha + \delta y\cos\beta + \delta z\cos\gamma$ sarà la variazione δp di questa normale. S'intende che x, y, z; a, b, c sono le coordinate delle estremità di p.

progressivo e di rotatorio. Se dopo ciò ammettiamo il moto minimo del fluido e del solido, nella equazione (B) in luogo di δx, δy, δz, dovremo porre $\delta x + \delta\xi$, $\delta y + \delta\eta$, $\delta z + \delta\zeta$; come metteremo questi binomi con uno e con due accenti in luogo di $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, e di $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$.

Per la prima sostituzione rimanendo i termini affetti da δx, δy, δz; col mandare a zero i loro coefficienti otterremo le stesse equazioni avute di sopra. L'introduzione poi delle variazioni $\delta\xi$ $\delta\eta$ $\delta\zeta$ non porta cangiamento veruno in quelle equazioni, giacché eguagliando a zero i coefficienti di δx, δy, δz svaniranno contemporaneamente le varazioni $\delta\xi$ $\delta\eta$ $\delta\zeta$. Non resta pertanto che fare le sostituzioni nell'equazione ai limiti che è la parte accentata dell'equazione (B), o meglio nell'equazione (D): quindi avremo

$$S\lambda''(\delta\xi''dydz + \delta\eta''dxdz + \delta\zeta''dxdy) =$$

$$S\lambda'(\delta\xi'dydz + \delta\eta'dxdz + \delta\zeta'dxdy)$$

che essendo $\lambda''=0$ si riduce a

$$S\lambda'(\delta\xi'dydz + \delta\eta'dxdz + \delta\zeta'dxdy) = 0$$

questa per le cose dette (§. 15.) diviene

$$S\lambda'(\delta\xi'\cos\alpha + \delta\eta'\cos\beta + \delta\zeta'\cos\gamma)ds = 0.$$

In questa equazione si pongano i valori

$$\delta\xi' = \delta l + z'\delta M - y'\delta N,$$

$$\delta\eta' = \delta m - z'\delta L + x'\delta N,$$

$$\delta\zeta' = \delta n + y'\delta L, - x'\delta M$$

e si mandino a zero i coefficienti delle sei indeterminate

δl, δm, δn, δL, δM, δN, avremo le sei equazioni

$$S\,\lambda'\cos\alpha\, ds=0\ ,\ S\,\lambda'\cos\beta\, ds=0\ ,\ S\,\lambda'\cos\gamma\, ds=0,$$

$$S\lambda'(y'\cos\gamma - z\cos\beta)ds=0,$$

$$S\lambda'(z'\cos\alpha - x'\cos\gamma)ds=0.$$

$$S\lambda'(x'\cos\beta - y'\cos\alpha)ds=0.$$

Queste equazioni che abbiamo ottenute coincidono con quelle che assegna la meccanica per l'equilibrio d'un solido. In queste uoi scorgiamo in luogo di forze qualunque le forze di pressione, che agiscono sulla superficie del solido avviluppato dal fluido. Le equazioni $-\frac{d\lambda}{dx}=qX, -\frac{d\lambda}{dy}=qY, -\frac{d\lambda}{dz}=qZ$ sono le equazioni per l'equilibrio del fluido ambiente, sia che il corpo avviluppato sia fisso o mobile.

17. **Doppia maniera di considerare l'azione del fluido ambiente contro il corpo immerso.** La sostituzione di $\delta x+\delta\xi$, $\delta y+\delta\eta$, $\delta z+\delta\zeta$, si faccia nella equazione (A) (§. 11) in luogo di δx, δy, δz, e ciò prima col ritenere δx, δy, δz; secondo col sostituire a queste quantità $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$. Per la prima sostituzione avremo le stesse conseguenze avute coll'ipotesi del corpo immerso immobile che sono l'equazioni per l'equilibrio del fluido ambiente. Facendosi la sostituzione di $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, a δx, δy, δz spariranno i termini $\frac{d\delta x}{dx}$, $\frac{d\delta y}{dy}$, $\frac{d\delta z}{dz}$, perchè nei valori di $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, mancano rispettivamente x, y, z e questi sono coefficienti differenziali relativamente a queste quantità; quindi dalla equazione(A)colla detta sostituzione avremo

$$S\left[-q\left(X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta\right)\right]=0.$$

Si pongano in questa i valori di $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, e si mandino a zero i coefficienti delle sei indeterminate δl, δm, δn, δL, δM, δN, avremo le equazioni

$$SqX=0,\ SqY=0,\ SqZ=0$$

$$Sq\left(Zy-Yz\right)=0,\ Sq\left(Xz-Zx\right)=0,\ Sq\left(Yx-Xy\right)=0.$$

18. Queste sono le equazioni per l'equilibrio di un solido; sono perciò l'equazioni per l'equilibrio del corpo immerso; dunque per questo corpo abbiamo ottenuto equazioni di equilibrio prima espresse in pressioni del fluido ambiente; poi espresse nelle forze dalle quali è animato il fluido; l'equilibrio pertanto del corpo immerso si ha e considerando il fluido ambiente come fluido che produce alla superficie del corpo pressioni in equilibrio, e considerando il fluido ambiente come solido, che facendo corpo col solido avviluppato gli comunica le sue forze in equilibrio.

Queste due conseguenze, che danno la stessa verità sono venute prima dal sostituire $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$ in luogo di $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ nell'equazione al limite

$$S\lambda'(\delta x'dydz+\delta y'dxdz+\delta z'dxdy)=0,$$

e poi dal sostituire $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ in luogo di δx, δy, δz nell'equazione

$$Sq(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)dxdydz=0.$$

Ciò da luogo ad un interessante teorema di statica.

Teorema di statica. Quindi dimostriamo, che le due equazioni

$$S\lambda'(\delta\xi' dydz + \delta\eta' dxdz + \delta\zeta dxdy) = 0$$

$$Sq(X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)dxdydz = 0$$

danno lo stesso risultamento.

Abbiamo dimostrato le equazioni

$$qX = -\frac{d\lambda}{dx},\ qY = -\frac{d\lambda}{dy},\ \ qZ = -\frac{d\lambda}{dz}.$$

Essendo i valori di $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ rispettivamente indipendenti da x, y, z potremo trasformare le antecedenti uguaglianze in queste

$$qX\delta\xi = d\left(\frac{\lambda\delta\xi}{dx}\right),\ \ qY\delta\eta = d\left(\frac{\lambda\delta\eta}{dy}\right),\ \ qZ\delta\zeta = d\left(\frac{\lambda\delta\zeta}{dz}\right),$$

dunque colla sostituzione di questi valori l' equazione (2) diventa

$$S\left(\frac{d\lambda\delta\xi}{dx}\right) + \left(\frac{d\lambda\delta\eta}{dy}\right) + \left(\frac{d\lambda\delta\zeta}{dz}\right) = 0$$

integrando per parti, portando ai limiti l'integrale ed uguagliando a zero la quantità ai limiti, il tutto come sopra, avremo

$$S\lambda''\,[\delta\xi''\,dydz + \delta\eta''\,dxdz + \delta\zeta''\,dxdy]$$
$$- S\lambda'\,(\delta\xi'\,dydz + \delta\eta'\,dxdz + \delta\zeta'\,dxdy) = 0.$$

ma $\lambda'' = 0$ dunque

$$S\lambda'\,[\delta\xi'\,dydz + \delta\eta'\,dxdz + \delta\zeta' dxdy] = 0.$$

che è l'equazione (1).

19. **Si stabilisce l' equazione dell' equilibrio dei fluidi compressibili colle velocità virtuali.** Fino ad ora abbiamo supposto che il fluido fosse incompressibile, ora dovremo supporlo compressibile, cioè ela-

stico. L'elasticità è una forza che tende a dilatare il volume, ossia tendente a produrre la variazione del volume espressa da $\delta.dxdydz$. Questo volume infinitamente piccolo si può supporre come una retta, secondo la quale agisce l'elasticità, e che tende ad aumentarla: quindi la variazione di questo volume può considerarsi come la velocità virtuale della elasticità stimata sulla retta secondo cui essa agisce. Nominando e l'elasticità, $e\delta.dxdydz$ sarà il momento di questa forza che anderà aggiunto a

$$q(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dxdydz$$

momento delle forze applicate alla molecola del dato volume $dxdydz$, perciò l'equazione generale dell'equilibrio dei fluidi elastici sarà

$$Sq(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dxdydz + Se\delta.dxdydz = 0$$

equazione simile a quella dei fluidi incompressibili solo che si cambi il λ in e; quindi trattata allo stesso modo ci darà la stessa formola di equilibrio. Perciò l'equazione

$$dp = Sq(Xdx + Ydy + Zdz)$$

è l'unica equazione per l'equilibrio d'ogni maniera di fluidi.

Se si avesse difficoltà di ammettere il volume $dxdydz$, come una retta, la $\delta.dxdydz$ non sarebbe più la velocità virtuale della elasticità stimata nel senso di questa retta; ma avvertendo al calcolo fatto di sopra nel prendere la variazione di $dxdydz$, e nel fare l'integrazioni per parti, si vedrà che questa variazione dà in ultimo i δx, δy, δz, moltiplicati per fattori che saranno forze secondo queste lineole infinitesime.

20. **Interessante riflessione sull'equazione generale dell'equilibrio dei fluidi.** Riflettendo sulla formola generale dell'equilibrio dei fluidi

$$dp = q(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

si vede che dp è un differenziale esatto, dunque deve essere differenziale esatto anche

$$q(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

quindi per la condizione del calcolo differenziale dovremo avere le equazioni

$$\left(\frac{d.q\mathrm{X}}{dy}\right)=\left(\frac{d.q\mathrm{Y}}{dx}\right),\ \left(\frac{d.q\mathrm{X}}{dz}\right)=\left(\frac{d.q\mathrm{Z}}{dx}\right),\ \left(\frac{d.q\mathrm{Y}}{dz}\right)=\left(\frac{d.q\mathrm{Z}}{dy}\right),$$

alle quali dovranno soddisfare la densità del fluido e le forze da cui è animato onde si abbia l'equilibrio.

CAPO III.

Della Superficie di Livello.

21. **Condizione algebraica per la superficie di livello.** Superficie di Livello è quella dove la pressione è nulla o costante. Ora per ambedue i casi il differenziale della pressione è nullo, dunque la superficie di livello sarà quella dove $dp = 0$.

Ammettendo questa condizione nella formola generale dell'equilibrio avremo

$$q(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = 0;$$

la densità non potendo esser nulla, avremo $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0$; che sarà l'equazione differenziale della superficie di livello, quando le forze X, Y, Z, che sono rette, si diano in coordinate.

22. **Proprietà della superficie di livello.** Una proprietà rimarchevole della superficie di livello è che ad ogni suo punto è normale la risultante delle forze che vi sono

applicate. Infatti si dica R la risultante delle forze X, Y, Z applicate al punto di coordinate x, y, z; e sia ds una linea infinitesima che partendo dal detto punto combacia in una posizione qualunque coll'elemento infinitesimo della superficie del fluido, o si trova nel piano tangente in questo punto alla superficie. Si divida l'equazione antecedente pel prodotto Rds ci darà

$$\frac{X}{R}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{R}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{R}\cdot\frac{dz}{ds}=0.$$

Ora $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$ sono i coseni degli angoli che la risultante R fa coi tre assi, e $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sono i coseni degli angoli che la ds fa cogli stessi assi; dunque l' equazione antecedente ci dice che è zero la somma dei coseni degli angoli analoghi che coi tre assi fanno le rette R, ds: queste due rette saranno perciò normali, cioè la risultante R è normale a tutte le rette ds che combaciano col piano tangente, e per conseguenza è normale al piano tangente o alla superficie di livello nel punto di coordinate x, y, z, dove sono applicate le forze X, Y, Z.

23. **Altra dimostrazione della stessa proprietà.** La stessa verità si dimostra colla condizione di geometria (*)

(*) Il carattere geometrico della normale ad una superficie è che sia la massima o la minima di tutte le rette infinitamente prossime condotte alla superficie dal punto d'onde è condotta la normale: è massima per le superficie concave, ed è minima per le convesse e le piane. Sia $Adx+Bdy+Cdz=0$ l'equazione differenziale di una superficie qualunque, e siano a, b, c le coordinate del punto da cui è condotta una retta che va al punto x, y, z, della superficie. Il valore di questa retta, che si dica r, sarà $\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}$. Affinchè questa retta diventi normale al detto punto della superficie deve essere massima o minima; dunque dr deve essere zero, e differenziando il suo valore dovrà essere

Affinchè una retta sia normale ad una superficie di equazione differenziale data, i coseni degli angoli che essa fa cogli assi delle x, y, z debbono essere uguali ai coefficienti differenziali relativi alle coordinate x, y, z che si trovano nell' equazione differenziale, divisi per la radice della somma dei quadrati dei detti tre coefficienti differenziali: dunque uominando α, β, γ, gli angoli che la normale alla superficie di equazione $Xdx+Ydy+Zdz=0$ fa coi tre assi sarà

$$\left(\frac{x-a}{r}\right)dx+\left(\frac{y-b}{r}\right)dy+\left(\frac{z-c}{r}\right)dz=0.$$

Per identificare questa equazione coll'equazione differenziale della superficie la moltiplicheremo per un fattore incognito M, quindi

$$M\left(\frac{x-a}{r}\right)=A,\ M\left(\frac{y-b}{r}\right)=B,\ M\left(\frac{z-c}{r}\right)=C,$$

Facendo il quadrato di queste eqnazioni, sommando ed avvertendo all'equazione, $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ avremo $M^2=A^2+B^2+C^2$, dunque

$$\frac{x-a}{r}=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\ \frac{y-b}{r}=\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

$$\frac{z-c}{r}=\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

che sono le condizioni perchè r sia normale: dunque dicendosi α, β, γ, gli angoli che questa normale fa coi tre assi ed avvertendo che

$$\cos\alpha=\frac{x-a}{r},\ \cos\beta=\frac{y-b}{r},\ \cos\gamma=\frac{z-c}{r}$$

avremo per i coseni degli angoli che la normale fa coi tre assi

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\ \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}, \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}.$$

Ora questi sono i coseni degli angoli che la risultante delle tre forze X, Y, Z fa coi tre assi, quindi la risultante delle forze applicate ad un punto qualunque della superficie di livello è normale alla superficie in questo punto.

24. **Altra proprietà delle superficie di livello.** Nel caso della natura il trinomio $Xdx+Ydy+Zdz$ è un differenziale esatto, dunque dall'equazione $dp=q(Xdx+Ydy+Zdz)$ ossia dalla $\frac{dp}{q}=Xdx+Ydy+Zdz$ si ricava che $\frac{dp}{q}$ deve essere un differenziale esatto; perciò q deve essere una funzione di p: ma una funzione tale che fatto $p=0$ non riesca la q zero, perchè la densità non può essere nulla, quindi q è funzione tale di p che se $p=0$ riesca costante.

Abbiamo detto che il livello del fluido in quiete è la superficie dove la pressione è zero, o costante: dunque nella superficie di livello per ciò che testè si è detto la q è costante: ma q è funzione delle x, y, z dunque $q=$ *costante* è l'equazione delle superficie di livello, e la sua equazione differenziale sarà

$$(1)\quad \left(\frac{dq}{dx}\right)dx+\left(\frac{dq}{dy}\right)dy+\left(\frac{dq}{dz}\right)dz=0.$$

Si dica r il raggio vettore condotto dal punto (x, y, z) al punto $(x+dx, y+dy, z+dz)$, ed α, β, γ siano gli angoli che esso fa cogli assi ortogonali, avremo $dx=r\cos\alpha$, $dy=r\cos\beta$, $dz=r\cos\gamma$, l'equazione (1) diverrà

$$\frac{dq}{dx}\cos\alpha+\frac{dq}{dy}\cos\beta+\frac{dq}{dz}\cos\gamma=0$$

e sarà

$$(2)\qquad \mathrm{d}q = \pm r\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\cos\alpha + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\cos\beta + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\cos\gamma\right).$$

Il raggio vettore r sarà normale alla superficie (1) quando (Nota § 23)

$$(3)\qquad \frac{\cos\alpha}{\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)} = \frac{\cos\beta}{\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\right)} = \frac{\cos\gamma}{\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\right)} =$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]}},$$

nel qual caso sarà

$$(4)\qquad \mathrm{d}q = \pm r\sqrt{\left[\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]}$$

Ora si dimostra che questo valore di $\mathrm{d}q$ è il più grande di quelli che si hanno dall'equazione (2) quando vi si sostituiscono per α, β, γ dei valori proprj a verificare le condizioni (3).

Infatti abbiamo generalmente

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\cos\alpha + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\cos\beta + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\cos\gamma\right)^2 \\ &+\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\cos\gamma - \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\cos\beta\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\cos\alpha - \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\cos\gamma\right)^2 \\ &+\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\cos\beta - \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\cos\alpha\right)^2 \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\right)^2 \end{aligned}\right.$$

dove il

$$\left(\frac{dq}{dx}\cos\alpha + \frac{dq}{dy}\cos\beta + \frac{dq}{dz}\cos\gamma\right)^2 <$$

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dz}\right)^2$$

$$\text{(6)} \quad \text{ossia} \quad r\left(\frac{dq}{dx}\cos\alpha + \frac{dq}{dy}\cos\beta + \frac{dq}{dz}\cos\gamma\right) <$$

$$r\sqrt{\left[\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dz}\right)^2\right]}$$

Ora il primo membro di questa disuguaglianza è il valore di dq nella formola (2); il secondo è il valore di dq nella formola (4); dunque l' aumento o decremento della densità, è massimo quando si prende sulla direzione r che riesca normale alla superficie di livello $q=$ *costante*: ma alla superficie di livello è normale la risultante delle forze X, Y, Z, dunque se si passa ad un punto della superficie di livello da un punto infinitamente prossimo allora riuscirà l'aumento o decremento massimo delle densità, quando si faccia questo passaggio secondo la risultante delle forze applicate al detto punto della superficie di livello.

L'inuguaglianza (6) non ha luogo se nell' equazione (5) si avesse

$$\frac{dq}{dy}\cos\gamma - \frac{dq}{dz}\cos\beta = 0, \quad \frac{dq}{dz}\cos\alpha - \frac{dq}{dx}\cos\gamma = 0,$$

$$\frac{dq}{dx}\cos\beta - \frac{dq}{dy}\cos\alpha = 0$$

ma queste sono le condizioni (3), dunque le dq d'una direzione qualunque r sarà divenuta la dq per la direziono normale alla superficie di livello.

25. **Superficie di livello quando le forze sono dirette ad un centro.** Se un fluido è animato da forze che partono da un centro come accade nella terra, la sua superficie di livello sarà una superficie sferica concentrica al centro d'attrazione. Imperocchè a detta superficie sono normali tutte le rette o forze condotte dal punto d'attrazione.

Si può ciò facilmente vedere anche col calcolo. Perciò supponiamo che l'origine delle coordinate sia al centro attraente, che r sia la retta che dal centro va al punto x, y, z della superficie di livello, e che R sia la risultante delle forze X, Y, Z applicate a questo punto avremo

$$X = -\frac{Rx}{r},\ Y = -\frac{Ry}{r},\ Z = -\frac{Rz}{r};$$

nelle quali si è posto il segno negativo perchè le forze X, Y, Z nella equazione di livello tendono ad aumentare le coordinate, mentre nel caso nostro le componenti di R dirette alla origine delle coordinate tendono a diminuirle. È evidente che $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ sono i coseni degli angoli che R fa coi tre assi o colle tre sue componenti X, Y, Z. Sostituendo le quantità antecedenti nella equazione differenziale del livello $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ e togliendo il fattore comune $-\frac{R}{r}$ avremo $xdx + ydy + zdz = 0$ ed integrando $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ ove C^2 è la costante arbitraria in cui si intende incluso il moltiplicatore 2 che dovrebbe essere divisore del primo membro. Ora $x^2 + y^2 + z^2$ è il quadrato della distanza di un punto qualunque della superficie di livello dalla origine delle coordinate, o dal centro attraente; essendo costante questa distanza, la superficie è sferica.

26. La superficie pertanto di livello dell'acqua stagnante è superficie sferica, ed un arco di circolo massimo su questa superficie sarà linea di livello.

27. **Superficie e linea di livello nell' acqua stagnante.** Se però si consideri una quantità di acqua stagnante qual può essere in uno dei nostri recipienti, si può senza errore sensibile supporre piana la superficie di livello, e perciò retta la linea di livello, figure ambedue tangenti alla superficie terrestre.

Se però si traguardasse ad un punto distante secondo questo piano o linea di livello, il piano e la linea così estesi ci darebbero il così detto *piano* o *linea di falso livello*; quindi linea di falso livello è il prolungamento della retta di vero livello. Questa sempre va a punti sollevati sopra la linea di livello vero che è l'arco del circolo massimo concentrico colla superficie terrestre cui la linea di falso livello è tangente. Quindi se alla estremità di questa linea di falso livello si ponga un'asta verticale, questa prolungata nell'interno della terra passerà pel suo centro, e andando alla parte opposta formerà una secante unita colla tangente che è la linea di falso livello, e la porzione di questa secante compresa fra il suolo e l'intersezione colla tangente o linea di falso livello, esprimerà di quanto il punto estremo di questa retta si troverà al disopra della linea di vero livello.

CAPO IV.

Della Livellazione.

28. **Si definisce la livellazione.** Livellare vuol dire riferire i diversi punti dello spazio alla superficie o linea di livello per determinare la loro posizione rispettiva verticale, o la posizione verticale sopra la superficie o linea di livello. Gli istromenti che servono a ciò si chiamano *Livelli*.

Nel trattare della livellazione diremo prima dei livelli; secondo del metodo di livellare; terzo del modo di dise-

gnare la livellazione; quarto delle correzioni da farsi nella livellazione.

I principali livelli sono i così detti a pelo d'acqua, ed a bolla d'aria.

29. **Livello a pelo d'acqua.** Il Livello a pelo d'acqua è un sifone di vetro ripiegato in due angoli retti nel quale vi è un fluido colorato che si solleva nei due tubi i cui assi fanno angolo retto coll' asse del tubo interposto. Questo sifone sostenuto nel tubo traverso da un cavalletto può avere i due moti orizzontale e verticale. In questo strumento si traguarda rasente le superficie del fluido colorato in quiete dentro i due tubi elevati, e guardando verso un punto a distanza questo si trova in linea di livello.

30. **Livello a bolla d'aria.** Il livello a bolla d'aria è un tubo di vetro pieno di alcool, meno una piccola quantità d'aria lasciata. Questo tubo si conforma in arco circolare, talchè fatta una sezione verticale e longitudinale si scopre questo arco di cerchio, di cui la corda sarà l' asse del tubo. Si procura che quest'arco di circolo sia della minima curvatura possibile o appartenga al più gran raggio per lo scopo che or ora diremo.

Si fanno due segni ad equidistanza dal punto medio dell'arco che siano limiti della estensione della bolla d' aria, ed è evidente che allora questo punto è culminante, o che la corda è orizzontale quando la bolla d'aria si trovi fra i due segni. Infatti solo quando la corda è orizzontale le due pressioni laterali sono uguali, e perciò la bolla d'aria sarà in quiete in mezzo all'alcool. Si vuole poi che l'arco di circolo sia della minima curvatura possibile, perchè il minimo angolo di deviazione dalla verticale del raggio che passa per quel punto culminante è mostrato da un arco di circolo tanto maggiore quanto è più piccola la sua curvatura.

31. **Confronto dei due livelli.** Questo livello oltre la sua grande sensibilità può essere munito di un Telescopio; il quale gli deve essere adattato così che il suo asse sia parallelo alla corda dell'arco di circolo di cui abbiamo parlato, perchè l'orizzontalità di questa corda avendo luogo quando la bolla d'aria è tra i due segni, essa porterà con se l'orizzontalità dell'asse del Telescopio.

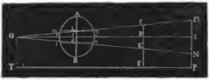
32 **Qual sia il migliore livello.** È facile il vedere che il livello conformato a cilindro è il più sensibile. Egli è vero che per questa grande sensibilità la bolla d'aria nel livello a cilindro facilmente si distoglie dalla sua situazione media, chè, posto lo strumento anche sù terreno sodo, la bolla si muove se da una parte si muova uno de' circostanti: ma ciò farebbe ostacolo se si proseguisse a collimare colla biffa, per la quale si richiede un tempo pel collocamento; ora però si usa di leggere col cannocchiale l'altezza del punto nella staggia graduata, detta perciò parlante, quindi al momento che la bolla è nella situazione media si nota col cannocchiale la detta altezza.

33. **Staggia parlante, e Telometro.** La staggia parlante è un'asta piana di legno, della lunghezza di metri 4.35, e larga 0.^{m}06 divisa in metri, centimetri, e doppi millimetri contrasegnata con numeri ad ogni decimetro, e scritta a rovescio, che si rettifica col cannocchiale pel quale si vede a rovescio. Il cannocchiale mostra l'oggetto a rovescio perchè è inutile il vederlo diritto, e perchè si vede più chiaro, contribuendo a ciò la mancanza di altra lente che ne raddrizzi l'immagine. La staggia si pone verticale per mezzo d'un filo a piombo. Dalla parte dell'oculare nel cannocchiale v'è un reticolo, che è un telarino circolare dove sono tesi due fili di ragno, che sono due diametri l'uno orizzontale, e l'altro verticale. Oltre a questi vi sono due altri fili paralleli ed equidistanti dal filo orizzontale, e distanti

fra loro così che le due visuali che radono questi fili nei due punti di loro intersezione col filo verticale alla distanza di 100 metri intercettino un metro nella staggia parlante verticale.

Col cannocchiale conformato così si può avere l' altezza del punto collimato, e la distanza orizzontale dal punto ove si trova chi collima. Questo strumento si chiama *Telometro.*

34. Elevazione dei punti e loro distanze avute col telometro. L' altezza del puuto collimato si trova leggendo nella staggia l' altezza del punto veduto in essa alla intersezione dei due fili diametri o sul diametro orizzontale. La distanza poi si ha moltiplicando 100 metri per la misura compresa sulla staggia dai due fili orizzontali paralleli al filo diametro.



Infatti nella figura A*m*B*n* è il reticolo del cannocchiale, nel quale i due diametri sono rappresentati da AB ed *rs*, ed i dne fili paralleli sono *mn* , *io*. Sia in O l'occhio che traguarda a traverso dei due punti *b* , *d* intersezioni dei due fili orizzontali col verticale o radendo questi fili, e che sulla staggia CF comprende CE misura d'un metro alla distanza TF di 100 metri dal collimatore. Egli è evidente che se le due visuali OC, OE in una altra staggia MP comprendono la misura MN in metri che dirò *a*, sarà la distanza TP=TF. $a= 100^m\ a$, Infatti per i triangoli simili OEC, OMN abbiamo TF: CE=TP: MN, ossia 100^m: 1^m=TP: *a*

Ciò suppone che il terreno sia pressochè orizzontale, nel qual caso la staggia è tenuta verticale e normale al terreno, tanto per trovare l'altezza che la distanza del punto. Ma se si fosse in una discesa o in una salita e per trovare la distanza si tenesse la staggia verticale cesserebbe di essere normale al terreno, sulla quale condizione è la base della formola 100. *a* per trovare col telometro le distanze dei diversi punti: quindi si procurerà che la staggia sia normale al terreno. La condizione poi che l'asse del Telescopio sia parallelo al terreno deve essere soddisfatta da chi livella.

35. **Metodo di livellazione.** Sia ora da livellare fra due punti per ravvisare la loro posizione rispettiva verticale, e questi punti siano A, e B. In primo luogo collo strumento collocato in A guardando B col metodo antecedente (34) potrò conoscere la distanza di questi punti. Posto poi il telometro fra A, e B, collimando verso A trovo alla staggia l'altezza, collimo inoltre verso B e trovo l'altezza, quindi dall'altezza collimando verso B tolgo l'altezza collimando verso A, se il risultato sarà positivo, questa differenza mi esprimerà l'elevazione del piede della staggia in A sopra il piede della staggia in B.



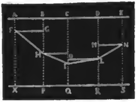
Infatti sia AD la prima altezza, e BE la seconda, la differenza fra BE, e DA ossia BC darà l'elevazione di A sopra B. Sia ora da livellarsi un lungo andamento fra A, e B.

Esprimano *a*, *b*, *c* i punti interposti nei quali si porrà successivamente la staggia, onde si abbiano le così dette *battute* fra A, *a*; fra *a*, *b*; fra *b*, *c*; e fra *c*, B. Primamente si collochi il telometro in A, perchè guardando alla

staggia in *a* si possa conoscere la distanza di questi due punti. Si porti poi lo strumento tra A, *a* e collimando verso A si noti l'altezza, e lo stesso si faccia collimando verso *a*. Si faccia il medesimo per la battuta tra *a*, *b*, e poi per la battuta fra *b*, *c*, e finalmente per la battuta fra *c*, B. Potremo dopo ciò fare una nota divisa in colonne. Nella prima si collocheranno le lettere indicanti l'estremità delle battute; nella seconda le lunghezze delle dette battute; nella terza le altezze collimando all'estremo A; nella quarta le altezze collimando verso B; nell'ultima le differenze delle altezze collimando alle estremità di ciascuna battuta: queste potranno essere in ciascuna battuta i residui del sottrarre dalle altezze collimando verso B l'altezze collimando verso A: i risultamenti positivi mi daranno di quanto il punto A e al disopra di *a*; di quanto *a* è sopra di *b*, e così di seguito: il residuo negativo mi darà al contrario di quanto per esempio A è al disotto di *a*.

Se poi si vorrà l'elevazione del primo punto A sù l'ultimo B, dalle somme di tutte le altezze collimando verso B sottrarrò la somma di tutte le altezze collimando verso A ed il risultamento se positivo mi darà di quanto A è elevato sopra B, ed il negativo mi darà l'inverso.

36. Disegno delle livellazioni. Se poi vorrò disegnare l'andamento dei punti dovrò disegnare le distanze dei punti da una comune orizzontale. Questa potrà essere o nell'alto o nel basso.



Siano le battute fra F, H; fra H, I; fra I, L; fra L, N. Sia AE l'orizzontale superiore, e la XS l'inferiore. Per i punti F, H, I, L, N si conducano le verticali XA, PB, QC, RD, SE. Si fissi la distanza FA del primo punto dall'orizzontale superiore, che suol farsi di 10 metri. Dalla livellazione si

hanno i valori delle distanze orizzontali delle battute cioè AB, BC, CD, DE; si hanno le differenze delle altezze nelle singole battute, e queste sono HC, IK, IO, ML, e queste si hanno col sottrarre dall' elevazioni progredendo verso N o dalle così dette *elevazioni in avanti*, l'elevazioni collimando verso F, o *l'elevazioni indietro*. Ora si vede che per avere la distanza d'ogni punto che si trova all'estremità della sua battuta dalla orizzontale al di sopra, bisogna aggiungere la differenza positiva di altezza trovata in questa battuta alla distanza del punto antecendente dall' orizzontale ; e se la differenza sia riuscita negativa queste si deve togliere dalla detta distanza. Dalla figura si vede che tutto il contrario si deve fare se l'orizzontale è sottoposta, cioè si deve togliere la differenza positiva, ed aggiungere la negativa resa positiva alla distanza del punto antecedente dalla orizzontale sottoposta. Tutto ciò si vede in figura.

Per disegnare tutto qnesto si farà colla scala di unità stabilita, che suol essere il metro.

37. **Correzioni della livellazione.** Triplice è la correzione da farsi nella livellazione : la prima *per la sfericità della terra*; la seconda *per difetto dello strumento*; la terza *per la rifrazione della luce.*

38. **Correzione della livellazione a causa della sfericità della terra.**

Abbiamo veduto di sopra (27), che la livellazione ci da la linea di falso livello ; e che il punto segnato dalla visuale nella staggia è più alto del punto di vero livello della parte esteriore d'una secante al meridiano terrestre , mentrechè la battuta della livellazione o la retta di falso livello è tangente al detto meridiano nel punto ove è il collimatore: dunque l'abbassamento che si deve dare al punto collimato onde sia punto di vero livello è uguale al quadrato della battnta diviso per la secante, che è teorema di geometria. Ora questa secante è il diametro della terra più la sua

parte esterna : ma questa si può trascurare rispetto il detto diametro, dunque la correzione di sfericità o la diminuzione dell' altezza collimata è uguale al quadrato della battuta diviso pel diametro terrestre. Sia c la correzione, a la battuta, d il diametro, avremo $c = \frac{a^2}{d}$.

39. **Correzione a causa del vizio dello strumento.** Nel reticolo del telometro quando il filo diametro orizzontale lo sia veramente sono orizzontali i fili paralleli, e verticale l'altro filo diametro. Per verificare il primo filo si collima ad oggetti che siano tagliati in dati punti dal detto filo. Facciamo subire un movimento al cannocchiale cosicchè le estremità dei diametri percorrano mezza circonferenza, il filo diametro orizzontale se lo sia dovrà segare i detti oggetti nei punti stessi antecedenti; se ciò non avvenga colle viti si fa sì, che il detto filo tagli gli oggetti nei detti punti.

40. **Correzione per la rifrazione della luce.** A causa della rifrazione della luce a distanza considerabile l'oggetto si vede più elevato del vero: quindi la visuale nella staggia a cotal distanza mi fissa un punto più basso di quello che veggo collimando, o più basso della linea di falso livello : perchè la luce che viene da quel punto della staggia descrivendo una curva al di sopra convessa ricevo l'impressione della vista secondo l'ultimo latercolo infinitesimo della curva o secondo la tangente, e secondo questa tangente è la linea di falso livello che va al disopra del detto puuto della staggia: quindi la rifrazione produce un effetto contrario a quello della sfericità della terra. Moltiplici esperienze hanno fatto stabilire agli idraulici, che la correzione è un settimo della correzione di sfericità: quindi dall'altezza notata nella staggia si deve togliere $\frac{a^2}{d}$ e gli si deve aggiungere $\frac{a^2}{7d}$; ossia riu-

nendo le due correzioni gli si deve togliere solamente $\frac{6a^2}{7d}$

41. Livellazione reciproca. Un mezzo che ha potuto servire per scoprire il difetto della rifrazione, e la correzione è la così detta *livellazione reciproca*, che serve anche per vedere se il cannocchiale ha vizio di elevare, od abbassare la visuale del punto collimato. Segni dunque il telescopio d'asse orizzontale un punto distante A mentre nel luogo ove mi trovo segna un punto vicino B; portato lo strnmento in vicinanza di A si gnardi A; voltato poi verso B se fosse esatto mi dovrebbe far vedere lo stesso B ; ma avendo vizio di darmi un punto più elevato del vero mi darà un punto C doppiamente più elevato del vero e ciò perchè si parte da un punto più elevato , e lo strumento da se da un pnnto più alto. Si divida dnnque nella verticale dei due punti B, C l'intervallo BC in mezzo, e col moto delle viti dello strumento si riduca esso a farmi vedere nel centro del reticolo quel punto medio.

Se la detta correzione si fà per una distanza non molto grande non vi può aver luogo l'effetto della rifrazione: quindi lo strumento si può avere esatto senza influenza della refrazione. Se dunque usato esso a collimare a punti di gran distanza colla livellazione reciproca si conosca collimarsi ad un punto più basso, si deve ciò ripetere dalla refrazione dell'aria , e raccogliendo da più osservazioni gli abbassamenti , e sommandoli , e dividendo la somma pel numero delle osservazioni si può avere la formola degli abbassamenti generalmente prodotti dalla rifrazione , e quindi si può aggiustarla colla correzione di sfericità, come si è fatto.

CAPO V.

Delle pressioni nei liquidi omogenei.

42. **Valore della pressione prodotta dai fluidi omogenei pesanti.** Determiniamo le pressioni ad ogni punto di un fluido pesante omogeneo in quiete.

Per ciò si prenda la formola $dp=q(Xdx+Ydy+Zdz)$, nella quale X, Y sono forze orizzontali, e Z è forza verticale tendente al basso: dunque nel fluido pesante le due prime saranno zero e la terza sarà la gravità. Se questa si dica uno avremo $dp=qdz$. Essendo il fluido omogeneo o di costante densità si potrà fare $q=1$, e quindi $dp=dz$, e $p=z+C$. La z è la distanza dal livello, dunque portando l'integrale avuto a questo luogo, la z sarà zero e la p la pressione al livello, che quantunque nel nostro caso sia la pressione atmosferica questa non produce effetto idrostatico e perciò si può porre $p=0$; dunque $C=0$, e $p=z$. Da ciò si ricava che la pressione ad un punto qualunque del liquido omogeneo in quiete è uguale alla distanza di questo punto dal livello.

Non si deve però confondere l' intensità della pressione colla sua direzione, perchè la distanza dal livello dà l'intensità della pressione, ma poi questa pressione deve esprimersi con una linea normale alla superficie infinitesima nel punto in proposito. Da ciò poi che si è detto della pressione (proem. 8) si ricava, che questa distanza dal livello è l'altezza del prisma di acqua distillata di base uno che col suo peso produrrebbe questa pressione.

43. **Formola della pressione contro la parete d'un recipiente di figura solido di rivoluzione.** Dopo di ciò possiamo dare la formola per le pressioni contro una superficie. Faremo perciò due casi: il primo domanderà la formola della pressione contro un piano circoscritto da linea della

quale si possa avere l'equazione: l'altro domanderà la formola per la pressione del fluido contro la superficie interna di un recipiente, la quale superficie sia di rivoluzione.

Cominciamo da questo. Sia la superficie generata dà una curva di data equazione, della quale si consideri uua parte di grandezza s e di coordinate allasuaestremità x, y. Nella detta superficie si consideri un cilindro di raggio y, e di altezza ds; la superficie di questo cilindro sarà $2\pi y ds$, dove la π esprime la circonferenza di diametro uno. Si supponga, che il livello del fluido dentro la detta superficie disti dalla origine delle ascisse di a, è evidente che la distanza dei punti della superficie $2\pi y ds$ del cilindro dal livello sarà $x-a$ dunque tutti questi punti risentiranno la pressione $x-a$ e perciò la totale pressione contro la detta superficie sarà $2\pi(x-a)yds$, e la pressione totale contro la superficie del recipiente compresa fra i limiti b ed a sarà

$$\int_a^b \left(x-a\right) yds = 2\pi \int_a^b \left(x-a\right) yds.$$

Per applicazione si voglia la pressione contro la superficie di un cono retto di altezza b. Nel nostro caso l'equazione della liuca generante la superficie sia $y=mx$. Dal calcolo differenziale abbiamo $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, nel nostro caso $dy=mdx$, dunque $ds=dx\sqrt{(1+m^2)}$, quindi

$$2\pi \int_a^b \left(x-a\right) yds = 2\pi m \sqrt{\left(1+m^2\right)} \int_a^b \left(x-a\right) xdx$$

$$= 2\pi m \sqrt{\left(1+m^2\right)} \int_a^b \left(x^2dx - axdx\right)$$

$$= 2\pi m \sqrt{\left(1+m^2\right)} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^3}{6}\right).$$

Se il recipiente sia pieno fiuo al vertice sarà $a=0$ e per-

ciò la pressione sarà

$$\frac{2}{3}\,\pi m \sqrt{(1+m^2)b^3} = \frac{2}{3}\,\pi mb \sqrt{(b^2+m^2b^2)b}.$$

Ora mb è uguale al raggio r della base, e $\sqrt{(b^2+m^2b^2)}$ è la generatrice d della superficie del cono dunque

$$\frac{2}{3}\,\pi mb\sqrt{(b^2+m^2b^2)b} = \frac{2}{3}\,\pi r d b = 2\pi r\,\frac{d}{2}\cdot\frac{2}{3}\,b$$

cioè è uguale alla superficie del recipiente moltiplicata per $\frac{2}{3}$ della sua altezza: ma a $\frac{2}{3}$ della altezza del cono si trova il centro di gravità della sua superficie; dunque se s'immagina un piano di superficie uguale alla superficie del cono e questo si supponga posto orizzontalmente al centro di gravità della superficie sarà premuto come la superficie stessa. Il peso di tutto il fluido dentro il cono è $\frac{2}{3}\,\pi r^2 b$. Se si confronta col valore antecedente $\frac{2}{3}\,\pi r d b$ si vedrà che questo è maggiore di quello, perchè $d > r$; quindi, avvegnachè la pressione contro la superficie del recipiente non sia prodotta che dal peso del fluido, pure è maggiore di questo.

Nella sfera $y^2 = 2rx - x^2$, e $ds = \frac{r\,dx}{y}$ dunque

$$2\pi \int_a^b y\,(x-a)\,ds = 2\pi r \int_a^b (x-a)\,dx$$

$$= 2\pi r\left(\frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\right)$$

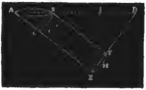
e se la sfera è piena la pressione sarà $4\pi r^3$ questo valore è triplo della solidità della sfera o del peso del fluido che la riempie. Inoltre la detta pressione equivalendo a $4\pi r^2.r.$ ci mostra, che se al centro del circolo si fa passare un piano quattro

volte la superficie del circolo massimo o uguale alla superficie della sfera, e che sia orizzontale, questo è premuto come la sfera.

44. **Maniera generale di valutare la pressione contro una superficie.** Quel che abbiamo veduto in questi due casi particolari si può dimostrare generalmente: cioè che la pressione contro una superficie qualunque equivale alla pressione contro un piano uguale a questa superficie e collocato orizzontalmente al centro di gravità di essa. Sia ds un elemento qualunque della superficie premuta, e z la sua distanza dal livello. Prendendo questo livello per piano de' momenti $\int zds$ sarà la somma de' momenti, ed $\frac{\int zds}{s}$ sarà la distanza Z dal livello del centro di gravità della intera superficie s. Avremo dunque $sZ=\int zds$. Si consideri ora l'equazione moltiplicata per le unità superficie, densità, e gravità, in tal caso z sarà la pressione sopra ds e perciò $\int zds$ sarà la pressione totale sopra la data superficie s; questa è uguale a sZ, cioè alla superficie proposta moltiplicata per la pressione Z: dunque se s sia un piano collocato orizzontalmente al centro di gravità, sZ esprimerà la pressione che questo piano risente, dunque è dimostrato il teorema.

45. Da ciò si vede che la pressione in una superficie si mantiene la stessa comunque essa si muova, purchè mantenga la stessa distanza del suo centro di gravità dal livello.

46. **Applicazione del metodo antecedente.** Sia il cilindro AEFB, inclinato alla verticale e pieno di fluido fino



al livello AB, si domanda la pressione che esercita questo fluido contro la base. Sia r il raggio del cilindro, α l'angolo CBF che la direttrice del cilindro fa colla verticale, ed u sia il volume del fluido. Per

trovare la ricercata pressione contro il circolo della base basterà trovare la distanza HI del centro di questo circolo, suo centro di gravità, dal livello AD. Si consideri la sezione BG parallela alla base, e si voglia il volume della parte di cilindro AGB, questo è evidentemente la metà del cilindro di base BG, e di altezza AG : ora questo ha per volume $2\pi r^2$ AG: ma essendo ABG$=\alpha$ sarà AG$=2r\tang\alpha$, dunque il volume di AGB sarà $2\pi r^3\tang\alpha$, che si potrà prendere anche per il volume del fluido contenuto in ABG. Il volume del fluido contenuto in GBFE è $2\pi r^2$ BF. Per l'ipotesi la totalità del fluido è a, dunque

$$2\pi r^3\tang\alpha+2\pi r^2 BF=a$$

e perciò $BF=\frac{a-2\pi r^3\tang\alpha}{2\pi r^2}$. Si prolunghi il diametro EF fino all'incontro del livello in D, avvertendo che l'angolo FBD è complemento di α, avremo

$$FD=BF\cot.\alpha=\frac{a-2\pi r^3\tang\alpha}{2\pi r^2}\cot.\alpha=\frac{a\cot\alpha}{2\pi r^2}-r$$

quindi $HD=\frac{a\cot\alpha.}{2\pi r^2}$. Nel triangolo rettangolo IHD ove

$$FBD=\alpha,\ IH=HD\mathrm{sen}\alpha=\frac{a\cos\alpha}{2\pi r^2}.$$

Dopo ciò la pressione contro la base sarà $2\pi r^2 HI=a\cos\alpha$. Per conoscere che cosa voglia esprimere questo risultamento che ci dice essere la pressione uguale al volume dell'acqua moltiplicato nel coseno della inclinazione del cilindro alla verticale, si rifletta, che il risultamento essendo pressione deve avere per moltiplicatore la gravità, dunque in questo risultamento avremo il fattore gravità moltiplicato nel coseno di α: la gravità agisce secondo BC, dunque avremo la componente della gravità secondo BF

cioè normale alla base del cilindro, dunque il risultamento ci dice che la pressione contro la base è prodotta dalla componente normale alla base, del peso del fluido ciò che deve essere.

Se per un piano immerso in un fluido non si volesse fare uso del teorema antecedente si può stabilire la formola per trovare la pressione che esso risente, che era la prima domanda al principio del capo.

47. **Formola per la pressione contro un piano immerso terminato da linea di data equazione.** Sia un piano limitato da una curva della quale si possa avere l'equazione rispetto l'asse delle x, cui sia simmetrica, ed m il seno dell'angolo di quest'asse colla sua proiezione nel piano di livello. Si supponga l'asse delle x prolungato al livello e sia r la porzione di questa retta compresa fra il livello ed il vertice della curva. Ad una assisa x sia condotta una ordinata orizzontale y e sia n il seno dell'angolo, che le ordinate fanno coll'assissa. Il differenziale di superficie sarà $2ny\mathrm{d}x$. Dall'estremo delle x si conduca al livello una verticale z, che esprimerà la pressione a tutti i punti della orizzontale $2y$, e quindi la pressione a tutti i punti dell'area $2ny\mathrm{d}x$: dunque la pressione totale di questa superficieola sarà $2nyz\mathrm{d}x$. Ora la z è il cateto di un triangolo rettangolo di cui $x+r$ è l'ipotenusa e l'angolo incontro a z ha per seno m dunque $z=m(x+r)$, perciò l'antecedente pressione sarà $2mny(x+r)\mathrm{d}x$, e la totale pressione domandata sarà $2mn\int y(x+r)\mathrm{d}x$. Se il piano sia a fior d'acqua sarà $r=0$ e la formola della pressione sarà $2mn\int yx\mathrm{d}x$; se finalmente il piano sarà verticale, e verticale l'asse delle ascisse nel qual caso le ordinate saranno normali al detto asse delle ascisse, avremo $m=n=1$, e la formola della pressione sarà

$$\int y(x+r)\mathrm{d}x.$$

Terminiamo con alcune applicazioni alla teoria delle pressioni.

Si ha una mezza sfera chiusa da un piano ed esattamente riempita di fluido, trovare la sua posizione onde risulti una pressione massima contro il recipiente.

Sia r il raggio della sfera, e θ l'angolo che l' asse del vaso fa colla verticale. La superficie del coperchio è πr^2, la distanza verticale del centro di questo circolo dal punto più elevato del liquido è $r\text{sen}\theta$: dunque la pressione contro il coperchio è $\pi r^3\text{sen}\theta$, ritenendo che la gravità, e la densità siano 1. La superficie curva del recipiente è $2\pi r^2$, la distanza verticale del suo centro di gravità dal punto più elevato del fluido è $r\text{sen}\theta + \frac{r}{2}\cos\theta$: dunque la pressione contro la detta superficie è $2\pi r^3\text{sen}\theta + \pi r^3\cos\theta$, e la pressione totale sarà $\pi r^3(3\text{sen}\theta + \cos\theta)$. Assoggettata questa alla condizione del massimo darà θ=arc. tang. (=3).

Una mezza sfera piena di liquido si tien ferma contro un piano verticale, che chiude esattamente l'apertura, perchè è appoggiata nella parte convessa contro un piano inclinato che sega il primo piano in una retta orizzontale. Si domanda quale è la pressione esercitata sopra il vaso da ciascun piano in caso d' equilibrio, e quale è il più grande angolo che l'equilibrio permette di fare ai due piani.

Sia r il raggio della sfera, uno la densità del fluido, α l'angolo dei due piani, S la pressione del piano verticale contro il contorno del vaso, R la pressione del piano inclinato, P la pressione risultante del liquido sulla mezza sfera, θ l'angolo di questa forza colla verticale. Le tre forze S, R, P debbono equilibrarsi. Le due ultime passano pel centro della sfera, dunque ancora S passa per questo punto. Di più queste forze sono in un piano verticale; dunque la condizione d'equilibrio si riduce a questo che siano parzialmente zero le somme delle loro componenti orizzontali, e verticali: quindi sarà $S+P\text{sen}\theta=R\cos\alpha$, $P\cos\theta=R\text{sen}\alpha$. Ora P è il peso del

liquido,che,supponendo1.la gravità, è $\frac{2}{3}\ \pi r^3$; Psenϑ è la pressione contro il piano verticale cioè $\pi q r^3$. Sostituendo questi valori nell'equazioni antecedenti avremo

$$R = \frac{2}{3}\ \pi r^3 \text{cosec.}\ \alpha,\ S = \frac{2}{3}\ \pi r^3\ \left(\text{cot.}\ \alpha - \frac{3}{2}\right)$$

valori cercati.

La pressione S non potendo essere negativa, ne siegue che il più grande angolo α permesso dall'equilibrio è quello che fa zero S, cioè $\alpha = \text{arc.tang.}\left(= \frac{2}{3}\right)$.

Si versa lentamente un liquido in un vaso cilindrico posato sù d'un piano inclinato, e si suppone che il cilindro abbia un peso trascurabile, e che non possa strisciare nel piano. Con questo versamento il vaso si rovescerà. Si domanda qual quantità di liquido si deve versare per aver questo rovesciamento.

Sia r il raggio del cilindro, ed α la tangente dell'angolo d'inclinazione del piano sull'orizzonte; il volume del liquido che produrrà il rovesciamento del vaso sarà

$$\pi r^3\ \frac{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\ \alpha^2 - \frac{1}{4}\alpha^4\right)}}{\alpha}.$$

Un cono di rivoluzione SAA' *aperto nella sua base e pieno di liquido s'inclina d'un dato angolo all'orizzontale. Quale è la parte del liquido che si versa, e quale è la pressione che il liquido restante esercita sulla parete del vaso?*

Sia α l'angolo della generatrice della superficie coll'asse, r il raggio della base, e β l'inclinazione dell'asse sull'orizzonte. Il volume dell'acqua scolata è il volume della parte di cono ABA″A′ al di sopra della sezione orizzontale ABA″.



Il volume totale del cono è $\frac{1}{3}\pi r^3 \cot.\,\alpha$. Il volume del cono obliquo ASA″ è il prodotto dell'area dell'ellisse ABA″ nel terzo dell'altezza AH. Se C è il centro dell'ellisse, e CA, CB i due semiassi, sarà il volume V di questo cono

$$V = \frac{1}{3}\,AH.\,\pi CA.CB.$$

Ora

$$AH = SA\,\text{sen}(\beta-\alpha) = \frac{r\,\text{sen}\,(\beta-\alpha)}{\text{sen}\alpha},$$

$$CA = \frac{1}{2}\,AA'' = \frac{r\cos\alpha}{\text{sen}(\beta+\alpha)}.$$

Per calcolare CB rappresenti A″A‴ il diametro della sezione normale all'asse del cono, e consideriamo la sezione pur normale all'asse condotta per C, cioè parallela alle due sezioni di diametri A″A‴, AA′: il punto C dividerà il diametro di questa sezione in parti che saranno rispettivamente $\frac{1}{2}$ AA′, $\frac{1}{2}$ A″A‴; allora la CB, essendo normale a questo diametro nel punto C, sarà media proporzionale ai detti segmenti, e quindi

$$CB^2 = \frac{1}{4}\,AA'.\,A''A''' = \frac{1}{2}\,rA''A'''$$

$$= \frac{1}{2}\,rAA''\,\frac{\text{sen}(\beta-\alpha)}{\cos\alpha} = r^2\,\frac{\text{sen}(\beta-\alpha)}{\text{sen}(\beta+\alpha)}:$$

quindi

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^3 \cot\alpha\,\frac{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(\beta+\alpha)}$$

quindi il valore dell'acqua uscita sarà

$$\frac{1}{3}\,\pi r^3 \cot\alpha \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}(\beta+\alpha)} \right\}.$$

Per calcolare la pressione del liquido contro il cono obliquo prenderemo per elemento della superficie il triangolo infinitesimo compreso fra due generatrici infinitamente prossime. Sia ds questo elemento. La distanza del suo centro di gravità dalla superficie di livello del liquido è $\frac{1}{3}$ AH, quindi la pressione su di esso sarà $\frac{1}{3}\,q\,\mathrm{AH}ds$. Questo elemento si può considerare come la base d'un triedro che ha il suo vertice in O′, ove il livello taglia l'asse del cono che sarà l'elemento del volume del cono obliquo. L'altezza di questo solidetto è SO′senα; quindi il volume avrà per espressione $dV = \frac{1}{3}\,\mathrm{SO'}\operatorname{sen}\alpha\, ds$: perciò la pressione contro l'elemento ds sarà espressa da

$$q\,\frac{\left(\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{SO'}}\right)}{\operatorname{sen}\alpha}\,dV = q\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\,dV$$

dunque la pressione totale sarà $q\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\,V$, ovvero

$$\frac{1}{3}\,\pi q r^3\,\frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha}\,\frac{\operatorname{sen}^3(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}^3(\beta+\alpha)}\;.$$

Un cubo pieno d'acqua è posto con una delle sue diagonali verticale; dimostrare che la pressione contro le faccie inferiori è doppia della pressione contro le faccie superiori.

Una cateratta verticale è formata di una parte rettangolare e di un'altra che è un quadrante unito in maniera che l'altezza del rettangolo sia il suo raggio **r**, *mentre l'altro raggio è orizzontale, e per diritto colla larghezza del rettangolo. La cateratta è mobile intorno alla retta d'unione del rettangolo col quadrante. Si domanda qual debba essere la larghezza del rettangolo, perchè trovandosi essa al livello del liquido trattenuto dalla cateratta, colla massima facilità essa si apra rotando intorno alla detta retta d'unione.* Detta x la cercata larghezza dovrà essere $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$.

CAPO VI.

Centro di Pressione.

48. Il solo piano premuto da un fluido è quello che sempre ha una risultante di pressioni ed un punto di applicazione di questa risultante che si chiama *centro di pressione.* Infatti dovendo essere le pressioni normali agli elementi di qualunque superficie, nel piano riescono parallele e tutte dirette per lo stesso verso. Dopo ciò si domanda la formola per determinare il centro di pressione in un piano.

49. **Formola pel centro di pressione.** Supponiamo che il piano sia limitato da curva di assegnabile equazione, e simmetrica rispetto l'asse delle x. Tutto ammetteremo come nel capo antecedente. Si è trovato (§ 47), che la pres-

sione sulla superficieola era espressa da

$$2mny\,(x+d)\,dx.$$

Questa pressione si collochi nel suo centro, cioè sul dx e si riferisca come a centro de' momenti al punto dove $x+d$ nell'estremo superioro si unisce al livello. In tal caso il momento della detta pressione sarà $2mny(x+d)^2dx$, e la somma de'momenti $2mn\int y(x+d)^2dx$; quindi la distanza X del centro di pressione dal centro de' momenti sarà ospressa da

$$X=\frac{\int y(x+d)^2dx}{\int y(x+d)\,dx}$$

dove ponderando si vede che il centro de' momenti dipende dalla inclinazione del piano premuto al piano di livello, comechè non vi sia espresso l'angolo dei due piani.

50. So il vertice del piano è a fior d'acqua sarà $d=0$ e perciò

$$(1)\qquad X=\frac{\int yx^2dx}{\int yx\,dx}.$$

51. **Centro di pressione di alcune figure.** Si voglia il centro di pressione del trapezio di cui uno de' suoi lati paralleli sia a fior d'acqua. La base superiore sia $2p$, l'inferiore $2q$, ed a la linea che le bisega.

Sia poi $y=mx+n$ l'equazione di una delle due retto laterali. L'equazione (1) diventa

$$(2)\quad X=\frac{\int x^2dx(mx+n)}{\int x\,dx(mx+n)}=\frac{x}{2}\left(\frac{3mx+4n}{2mx+3n}\right).$$

Se l'equazione $y=mx+n$ si porta al principio di a e poi al termine, dalle due provenienti equazioni ricaveremo $n=p$, $m=\frac{q-p}{a}$; sostituendo questi valori in (2), e facendo $x=a$ avremo pel centro di pressione di tutto il trapezio

$$X=\frac{a}{2}\left(\frac{3q+p}{2q+p}\right).$$

Di qui si ricava pel parallelogrammo, in cui $q=p$, $X=\frac{2}{3}a$.

Pel triangolo col vertice in alto, per cui $p=0$, $X=\frac{3}{4}a$.

E pel triangolo col vertice al basso, per cui $q=0$, $X=\frac{a}{2}$.

52. Sia ora un circolo, avremo

$$X=\frac{\int x^2 dx \sqrt{(2rx-x^2)}}{\int x\, dx \sqrt{(2rx-x^2)}}$$

e prendendo le ascisse dal centro, per lo che si deve porre $r-x$ invece di x, sarà

$$X=\int(r-x)^2 dx \sqrt{(r^2-x^2)} : \int(r-x)dx \sqrt{(r^2-x^2)}.$$

Ora

$$\int(r-x)^2 dx\sqrt{(r^2-x^2)}$$

$$=r^2\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}-2r\int xdx\sqrt{(r^2-x^2)}+\int x^2dx\sqrt{(r^2-x^2)}.$$

Ma $\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}$, o $\int ydx$ per tutto il circolo è la sua area πr^2. L'integrale di $xdx\sqrt{(r^2-x^2)}$, è $-\frac{1}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$, che per estenderlo a tutto il circolo si deve portare ai limiti $x=r$, $x=-r$: così facendo quell'integrale si annulla. Finalmente colla integrazione per parti trovasi

$$\int x^2dx\sqrt{(r^2-x^2)}=-\frac{1}{3}x(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\int dx(r^2-x^2)(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}x(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{r^2}{3}\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}-\frac{1}{3}\int x^2dx\sqrt{(r^2-x^2)}$$

e trasportando e dividendo per $\frac{4}{3}$, sarà

$$\int x^2 dx\sqrt{(r^2-x^2)} = -\frac{1}{4}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{r^2}{4}\int y dx,$$

ed integrando fra i limiti r e $-r$ avremo

$$\int_{+r}^{-r} x^2 dx\sqrt{(r^2-x^2)} = \frac{1}{4}\pi r^4$$

dunque

$$\int (r-x)^2 dx\sqrt{(r^2-x^2)} = \frac{5}{4}\pi r^4.$$

Pel denominatore sarà, integrando fra i medesimi limiti

$$\int_{+r}^{-r}(r-x)dx\sqrt{(r^2-x^2)} = r\int_{+r}^{-r} dx\sqrt{(r^2-x^2)}$$

$$-\int_{+r}^{-r} x dx\sqrt{(r^2-x^2)} = \pi r^3,$$

dunque

$$X = \frac{5}{4}\pi r^4 : \pi r^3 = \frac{5}{4} r = r + \frac{r}{4};$$

cioè il centro di pressione dista dal centro del circolo di un quarto del raggio. Nel caso del (§ 46) si voglia il centro di pressione sul circolo della base. Abbiamo ivi veduto essere $\frac{a\cot\alpha}{2\pi r^2} - r$ la distanza FD, dunque nell' equazione (§ 49)

$$X = \frac{\int y(x+d)^2 dx}{\int y(x+d)\, dx}$$

sarà

$$d = \frac{a\cot\alpha}{2\pi r^2} - r. \quad (a)$$

Computando le ascisse dal centro, e perciò ponendo $r-x$ invece di x sarà

$$X = \frac{\int\left(\frac{a\cot\alpha}{\pi r^2} - x\right)^2 dx\sqrt{(r^2-x^2)}}{\int\left(\frac{a\cot\alpha}{\pi r^2} - x\right) dx\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

Fatte le integrazioni, come nel § 52 troveremo

$$X = \frac{a\cot\alpha}{2\pi r^2} + \frac{1}{4}\,\frac{\pi r^4 \tang\alpha}{a}$$

ma nella (a) la $\frac{a\cot\alpha}{2\pi r^2}$ esprime la distanza del centro dalla intersezione del diametro prolungato col livello: dunque

$$\frac{1}{4}\,\frac{\pi r^4 \tang\alpha}{a}$$

esprime la distanza del centro di pressione dal centro del circolo. Osservando i risultamenti antecedenti, che ci danno i centri di pressione nelle diverse figure, si vede che questo è più basso del centro di gravità. Ciò è generale per tutti i centri di pressione.

53. **Il centro di pressione è più basso del centro di gravità.** Si consideri infatti un piano terminato comunque e posto orizzontalmente dentro un fluido, e si conduca una rètta che passi pel centro di gravità. In questa posizione il centro di gravità sarà eziandio il centro di pressione. Infatti il centro di gravità è il centro di forze parallele nguali, dirette nello stesso senso : ora nella detta posizione, le pressioni danno un sistema di forze parallele uguali e dirette nello stesso senso. Si supponga ora che il piano roti intorno alla retta disegnata, perciò una parte del detto piano da un lato della retta si solleverà , e l'altra si abbasserà. Ora nella parte che si solleva le pressioni vanno scemando dalla retta in su, ed in quella che si abbassa le pressioni vanno crescendo, cominciando dalla retta: dunque il centro di pressione, che si trovava sopra la retta, s'abbasserà per doppia causa, cioè per la diminuzione delle forze superiori, e per l'aumento delle inferiori, e quindi si farà più basso del centro di gravità.

54. **Altra proprietà del centro di pressione.** Un'altra proprietà del centro di pressione relativamente al cen-

tro di gravità è la seguente. *Sia un piano tutto immerso in un fluido; dal suo centro di gravità, e dal centro di pressione si conducano due parallele alla retta d' intersezione del piano prolungato col piano di livello; il prodotto delle distanze della retta intermedia del centro di gravità, dalla retta condotta pel centro di pressione, e dalla retta d'intersezione col livello resta costante, quando il piano di livello si elevi: cioè quel prodotto è indipendente dalla distanza del vertice del piano dal livello.* Sia a questa distanza presa sull' asse delle x condotto nel piano, ed s la superficie del piano; sarà la distanza del centro di gravità del piano dal livello presa sulla x prolungata $X=a+\frac{\int x ds}{s}$. Per la distanza del centro di pressione dallo stesso livello avremo

$$X'=\frac{\int(a+x)^2 ds}{\int(a+x)\,ds}=\frac{a^2s+2a\int x ds+\int x^2 ds}{as+\int x ds}:$$

quindi la distanza fra le parallele del centro di gravità e del centro di pressione sarà

$$X'-X=\frac{a^2s+2a\int x ds+\int x^2 ds}{as+\int x ds}-\frac{as+\int x ds}{s}$$

$$=\frac{s\int x^2 ds-(\int x ds)^2}{s(as+\int x ds)},$$

ed il prodotto enunciato dal teorema sarà

$$X(X'-X)=\frac{s\int x^2 ds-(\int x ds)^2}{s^2}$$

indipendente da a.

Provare che per l'area d'una parabola compresa fra la curva, l'asse a immerso, e l'ordinata b *normale a fior d'acqua; le coordinate del centro di pressione sono* $\frac{4}{7}$ a , $\frac{5}{16}$ b .

CAPO VII.

Della pressione dei fluidi pesanti eterogenei.

55. **Natura delle pressioni e della densità nei fluidi eterogenei pesanti.** Per li fluidi pesanti abbiamo (§. 42) $dp = qdz$: essendo dp differenziale esatto deve essere anche tale qdz: dunque o q è funzione di z, o di p: nel primo caso sarà ancora p funzione di z; nel secondo caso separando le variabili riuscirà p funzione di z, e quindi anche q funzione di z: dunque in caso d'equilibrio in ogni punto del fluido pesante debbono essere la pressione e la densità funzioni della distanza del detto punto dal livello; perciò il fluido in quiete deve essere disposto così, che sia diviso in strati della stessa densità paralleli alla superficie di livello. Quindi se un fluido sia mescolanza di diversi fluidi, quando non siano uniti per forza di intensità apprezzabile, si debbono disporre in strati come si è detto.

56. **Equilibrio stabile e non stabile nella mescolanza dei fluidi.** Equilibrio stabile d'un sistema di forze è quello che se per qualche azione estrinseca momentanea concepisce piccol moto, dopo poche e brevi oscillazioni ritorna al suo stato primitivo: instabile è quello che non vi si ripristina. Posto ciò affinchè l'equilibrio di più fluidi composti in strati paralleli al livello sia stabile, si richiede che i fluidi di più in più densi siano di più in più bassi. Si supponga che ciò avvenga, e che uno strato interposto fra il più denso inferiore ed il meno denso superiore concepisca un piccolo movimento, in tal caso una parte del detto strato si abbasserà dentro il fluido più denso, e da questo sperimentando una pressione maggiore del suo peso specifico sarà respinto di nuovo verso il suo posto; l'altra parte poi che si solleverà dentro il fluido più leggero, dalla

pressione di questo non essendo sostenuto, ricaderà verso il luogo primitivo.

Se poi sopra uno strato ve ne fosse un'altro di maggiore densità, ed al di sotto uno di minor densità, nel moto minimo sollevandosi nel primo caso una porzione di fluido nello strato superiore più denso, vi sarebbe sostenuto dalla pressione prevalente al suo peso specifico, e la parte che entrerebbe nello strato più basso e più leggero, vi rimarrebbe, perchè la pressione di questo inferiore alla gravità specifica della parte entrata, non varrebbe a risollevarla.

57. **Altezze di livelli in un fluido dentro un sifone.** In un sifone ricurvo in due bracci sollevati contenenti due fluidi di diversa densità in equilibrio, l'elevazioni dei due livelli sopra un piano orizzontale sono in ragione reciproca delle densità dei due fluidi. Siano q, q' le densità dei due fluidi, ed a, a' le altezze dei loro livelli su d'un piano orizzontale. Se si consideri una molecola infinitesima del fluido di densità q nel piano orizzontale, questa sarà premuta dall'alto in basso dalla a distanza dal livello del fluido di cui è parte, moltiplicata per la densità q: e sarà premuta dal basso in alto dalla sua distanza dal livello del fluido di densità q' moltiplicata per questa densità (§ 42); ora per l'equilibrio queste due pressioni debbono essere uguali. Se si dica ds la superficie della molecola saranno $aqds$, $a'q'ds$ le dette pressioni; dunque $aqds=a'q'ds$, o $qa=q'a'$: dunque il prodotto della densità nella elevazione del livello del fluido sopra il dato piano orizzontale deve essere costante, e perciò le densità sono in ragione inversa delle elevazioni dei due livelli sopra il detto piano orizzontale.

58. Se i due fluidi sono della stessa densità sarà $q=q'$, e perciò $a=a'$, cioè nel detto sifone in cui si trova uno stesso fluido in equilibrio li due livelli sono ugualmente elevati sul comune piano orizzontale. Si avvertirà che in

queste due condizioni di equilibrio si prescinde dalla conformazione e dimensione varia o costante delle sezioni del tubo.

59. **Applicazione ad un problema.** Sia da risolversi il problema. *Delle masse uguali di liquidi differenti sono sovrapposte l'una all'altra in strati orizzontali in un vaso cilindrico coll'asse verticale. Trovare le relazioni delle pressioni che queste differenti masse liquide esercitano sulle pareti del vaso.*

Siano q_1, q_2, q_3, ... q_n le densità dei diversi liquidi cominciando dal liquido superiore; a_1, a_2, a_3, ... a_n le grossezze degli strati rispettivi, ed r il raggio del vaso. Consideriamo lo strato n^{mo}. La pressione p_0 che si esercita alla superficie superiore di questo strato sarà data dalla equazione, dicendo al solito uno la gravità, $p_0 = q_1\ a_1 + q_2\ a_2 + a_3\ q_3$, ... $q_{n-1}\ a_{n-1}$; e perchè le masse $\pi r^2 q_1 a_1$, $\pi r^2 q_2 a_2$, ec. degli strati sono uguali sarà $p_0 = (n-1)\, q_1 a_1$: dunque la pressione che questo strato esercita sul contorno del vaso di altezza dz e distante di z dalla sua superficie superiore sarà espressa da

$$2\pi r \int_0^{a_n} (p_0 + q_n z) dz = 2\pi r p_0 a_n + \pi r q_n a^2{}_n$$

La quale diviene ponendoci il valore di p_0

$$\pi r(2n a_n q_1 a_1 + q_n a^2{}_n - 2a_n q_1 a_1)$$

$$= \pi r(2n a_n q_1 a_1 + a_n q_1 a_1 - 2a_n q_1 a_1)$$

$$= \pi r(2n a_n q_1 a_1 - a_n a_1 q_1) = \pi r a_n q_1 a_1 (2n - 1)$$

$$= r\pi q^2{}_1 a^2{}_1 \left(\frac{2n-1}{q_n}\right).$$

Ora facendo $n = 1, 2, 3 \ldots$ avremo per le relazioni domandate la serie delle quantità $\frac{1}{q_1}, \frac{3}{q_2}, \frac{5}{q_3}, \ldots$.

CAPO VIII.

Gravità specifiche dei corpi.

60. **Gravità specifiche dei corpi relative alla gravità specifica d'un fluido.** La gravità specifica d'un corpo è il suo peso in un determinato volume. Il teorema (§ 5) che un corpo immerso in un fluido pesante in quiete perde tanto di peso quanto è quello del fluido di cui occupa il posto ci dice, che il peso del corpo immerso ed il peso da esso perduto nell'immersione sono i pesi del corpo e del fluido in uno stesso volume, o le loro gravità specifiche.

61. **Maniera di trovare le gravità specifiche dei corpi.** Da questo principio si ha il metodo di trovare le gravità specifiche dei corpi. Per norma si fissa la gravità specifica dell' acqua distillata, che si considera come *uno*. Ciò stabilito si voglia la gravità specifica d' un solido. Si pesi esso nell' aria ed il peso sia P, si pesi poi quando è immerso nell'acqua distillata, ed il peso sia p: dunque $P-p$ sarà il peso perduto o il peso d' un ugual volume di acqua: dunque P, $P-p$ sono le gravità specifiche del corpo e dell'acqua. Se la gravità specifica dell'acqua distillata sia *uno* evidentemente quella del corpo sarà $\frac{P}{P-p}$, che sarà data in parti dell'unità gravità specifica dell'acqua distillata. Da ciò si ricava, che per avere le gravità specifiche dei diversi solidi relativamente alla gravità specifica dell' acqua distillata, si debbano dividere i loro pesi nell'aria per li pesi perduti nell'acqua, o per i loro pesi nell'aria diminuiti dei loro pesi nell'acqua.

Se il solido sia di minor gravità specifica dell'acqua, cosicché immerso in essa sia galleggiante, prima d'immergerlo

gli si unirà altro corpo che possa tenerlo dentro l'acqua, e di cui si conosca la perdita di peso dentro di essa, allora dalla perdita di peso del composto immerso si sottrarrà la perdita nota del corpo unito, e così si avrà la perdita di peso del corpo in proposito, per la quale si dividerà il suo peso nell'aria.

62. **Gravità specifica dei liquidi.** Riguardo ai liquidi un metodo è d'immergere uno stesso corpo nei diversi liquidi e pesarlo per trovare i pesi perduti, allora dicendo *uno* il peso perduto nell'acqua distillata si avranno le gravità specifiche degli altri liquidi rispetto questa unità, dividendo i pesi perduti dal corpo negli altri liquidi per quello perduto nell'acqua.

Si può eziandio trovare la gravità specifica dei diversi liquidi con un galleggiante in forma di cilindro e graduato dall'alto in basso, che si chiama *areòmetro.* Egli è evidente che le pressioni atte a sostenere il galleggiante nei diversi liquidi, o le loro gravità specifiche sono proporzionali ai gradi del galleggiante sporgente al di fuori del liquido, e che in conseguenza divisi i gradi degli altri liquidi per quelli dell' acqua distillata si avranno le loro gravità specifiche rispetto la gravità specifica di questa considerata come *uno.* Si può ancora far sì che l'*areometro* sia affondato alla stessa altezza nei diversi liquidi, e ciò per mezzo di opportuni pesi sul suo vertice conformato in piatto, perchè è evidente, che le gravità specifiche dei liquidi sono proporzionali ai detti pesi.

63. **Maniera di trovare il peso dei corpi colle gravità specifiche.** Un catalogo di gravità specifiche dei diversi corpi relativamente all' acqua distillata di gravità specifica *uno*, può servire a trovare i pesi dei diversi corpi nella stessa unità di volume, quando si conosca il peso di un ugual volume d'acqua, per esempio d'un metro cubo. Un metro cubo d'acqua pesa 1000 chilogrammi, ed ogni chilo-

grammo pesa libbre romane 3,947. Il metro lineare sono palmi romani 4,477. Posto ciò se le gravità specifiche dei diversi corpi date in gravità specifica dell'acqua distillata, si moltiplicano per 1000 chilogrammi, si avranno i pesi assoluti d'un metro cubo dei singoli corpi; cosa utilissima per la pratica.

64. **Formola per un composto di due corpi.** Sia un composto di due corpi, e si voglia una formola che colleghi il peso e gravità specifica del composto coi pesi e gravità specifiche dei componenti. Sia G la gravità specifica del composto p, p' i pesi dei componenti, e γ, γ' le loro gravità specifiche. Poichè la gravità specifica è il peso in una unità di volume, tante volte la gravità specifica entrerà in un peso, e tante unità di volume avremo: dunque il volume d'un corpo è il suo peso diviso per la sua gravità specifica; ed il peso diviso pel volume darà la gravità specifica del corpo. Dopo ciò $\frac{p}{\gamma}$, $\frac{p'}{\gamma'}$ saranno i volumi dei corpi componenti, e perciò $\frac{p}{\gamma} + \frac{p'}{\gamma'}$ sarà il volume del composto: dunque il peso $p+p'$ del composto diviso per questo volume darà la sua gravità specifica G; perciò

$$G = \frac{p + p'}{\frac{p}{\gamma} + \frac{p'}{\gamma'}}$$

che è la formola domandata.

Questa formola suppone che la somma dei volumi dei componenti sia uguale al volume del composto. Ciò è vero se i componenti siano semplicemente uniti; ma non è sempre vero se siano mescolati per esempio con fusione come sono i metalli; perchè per l'azione chimica delle molecole dei metalli uniti in soluzione, sorge il volume del composto sempre minore della somma dei volumi dei componenti.

La teoria delle gravità specifiche da la maniera di scoprire se un metallo sia puro o in lega con un altro; imperocchè la sua gravità specifica deve essere quella che si conosce della di lui materia quando è nella sua purità.

Tre pesi diversi P, Q, R *fanno successivamente equilibrio ad un cilindro omogeneo, che è sospeso al braccio d'una bilancia idrostatica, ed immerso in parte in un fluido. Si domanda una equazione fra i pesi* P, Q, R *e le altezze* a, b, c *corrispondenti alle parti del cilindro immerso.*

L'equazione è $P(b-c)+Q(c-a)+R(a-b)=0$.

Sia una sfera vuota di raggio esteriore a *formata di materia omogenea di densità* q : *questa sfera galleggia in un fluido di densità* q' *avendo immersa una parte di altezza* c; *determinare il raggio interno* a'

Si ha

$$a'=a\left(1-\frac{3}{4}\frac{q'}{q}\frac{c^2}{a^2}+\frac{1}{4}\frac{q'}{q}\frac{c^3}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Dato il peso P=lib. 2, *e la gravità specifica* G=18.261 *d'un pezzo d'oro, trovare il volume* x, *il raggio* y, *e la grossezza uniforme* y—z *di un globo vuoto, in cui dovrà conformarsi l'oro, affinchè la gravità specifica del globo sia a quella dell' acqua distillata* $\gamma=1$ *nella ragione di* m=1 ad n=2.

Avremo $x=\frac{Pn}{\gamma m}$=piedi cubi 0.057143; $y=\sqrt[3]{\frac{3Pn}{4\pi\gamma m}}$

=piedi 0,2389; $z=\sqrt[3]{\frac{3P}{4\pi}\left(\frac{n}{\gamma m}-\frac{1}{G}\right)}$= piedi 0.2367.

Dato il peso P=lib. 200, *e la gravità specifica d'un uomo* G=1.121 *trovare il peso* x, *di un tal pezzo di sughero di gravità specifica* γ'=0.24, *che la gravità specifica dell'uomo*

e del sughero uniti insieme, sia a quella dell'acqua di fiume $\gamma=1.090$ *nella ragione di* $m=9$ *ad* $n=10$.

sarà $x=P\gamma'\left(\frac{Gn-\gamma m}{\gamma m-\gamma' n}\right)=$ lib. 14 circa.

Sia un cono retto omogeneo, il cui vertice è fisso nell'interno d'un liquido a una profondità cognita. Il cono può girare liberamente intorno a questo punto, ed è al di fuori del fluido con tutta la sua base. Determinate l' inclinazione dell'asse all'orizzonte.

Sia a la distanza del vertice del cono dal livello del fluido, l la lunghezza della generatrice, α l'angolo che essa fa coll'asse del cono, q la densità del cono, e q' quella del liquido, l'inclinazione β domandata si avrà dall'equazione

$$\frac{qa^4}{q'l^4}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}^{\frac{5}{2}}(\beta+\alpha)\operatorname{sen}^{\frac{5}{2}}(\beta-\alpha)$$

CAPO IX.

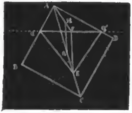
Dei Galleggianti.

65. Doppia è la condizione per l' equilibrio (§ 8) dei corpi galleggianti. La prima è che i centri di gravità del galleggiante e del fluido scacciato siano in una stessa verticale o in una retta normale al piano di livello. La seconda è che il peso o la massa del galleggiante sia uguale al peso o massa del fluido scacciato, o del fluido di volume uguale al volume della parte immersa. Quindi se sia V il volume del corpo, q la sua gravità specifica : v il volume immerso del corpo, e q' la gravità specifica del liquido sarà $qV=q'v$.

Dopo ciò sia il problema. *Determinare le posizioni di un prisma retto omogeneo di base quadrata, che galleggi orizzon-*

talmente sopra di un fluido essendo uno dei spigoli al di sopra del liquido.

Poichè il prisma è per tutto uniforme basterà trovare



le domandate condizioni per la base materiale AC quadrata; di questa base A è il vertice termine dello spigolo superiore al livello QQ'. Si conduca la diagonale AC e nel suo punto medio G si troverà il centro di gravità della base. Condotta poi AF al punto medio di QQ' e presa $AH = \frac{2}{3} AF$, in H sarà il centro di gravità del triangolo sporgente in fuori dal liquido. Poichè da questo triangolo e dalla parte immersa si forma l' intero quadrato, i due centri di gravità di quelle due figure dovranno essere in linea retta col centro di gravità del quadrato: dunque il centro di gravità della parte immersa e quello di tutto il quadrato dovranno trovarsi nella retta HG che congiunge i loro centri di gravità, dunque per la prima condizione dei galleggianti HG sarà normale a QQ'. Se da F si conduca FE parallela ad HG finchè incontri in E la diagonale, FE sarà normale a QQ': ma essa va al punto medio F di questa retta: dunque il punto E è equidistante da Q, Q', cioè EQ=EQ', che è l'espressione della prima condizione dei galleggianti. Sia a il lato del quadrato, x ed y AQ, AQ' porzioni dei lati AB, AD al di sopra del liquido. Ciò posto nei triangoli simili AHG, AFE come AH è $\frac{2}{3}$AF, così $AG = \frac{2}{3} AE$, o $AE = \frac{3}{2} AG$.

Le proiezioni di AE sopra i lati AB, AD sono uguali perchè con essi fa gli angoli uguali BAE, DAE. La proiezione di AE sopra di AD è $AE \cos EAD = \frac{3}{2} AG . \frac{AD}{AC} =$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$ AC . $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{4} a$. La relazione EQ=EQ′ ci dà

$$x^2 + AE^2 - 2x \frac{3a}{4} = y^2 + AE^2 - 2y \frac{3a}{4},$$

ovvero

$$(1) \quad (x-y)\left(x+y-\frac{3a}{2}\right)=0.$$

Esprimiamo l' altra condizione dei galleggianti siano q, q' le densità del prisma, e del fluido.

Abbiamo QCQ′=BD—AQQ′= $a^2 - \frac{1}{2} xy$, dunque la detta condizione sarà espressa da

$$(2) \quad q'\left(a^2 - \frac{1}{2} xy\right) = qa^2.$$

La (1) ci dà le due equazioni

$$(3) \quad x-y=0, x+y-\frac{3}{2} a=0$$

La prima $x=y$ sostituita in (2) ci dà

$$(4) \quad x=y=a \sqrt{2 \left[\left(1-\frac{q}{q'}\right)\right]}$$

ove dovrà essere $\frac{q}{q'} < 1$. Se $\frac{q}{q'} = \frac{1}{2}$ sarà $x=y=a$, cioè sporgerà fuori del liquido la metà del prisma come deve essere, perchè in tal caso la gravità specifica del liquido è doppia di quella del galleggiante, e questo sarà il limite inferiore, perchè per un valore minore di $\frac{q}{q'}$ avremo $x=>a$; quindi $\frac{q}{q'}$ deve essere compreso fra $\frac{1}{2}$ ed 1

Le due altre posizioni di equilibrio sono date dalla equazione (2) e dalla seconda (3), queste ci danno $x+y=\frac{3}{2} a$,

$$x - y = \pm a \sqrt{\left(\frac{8q}{q'} - \frac{23}{4}\right)}$$

dalle quali

$$x = \frac{1}{4} a \left(3 \pm \sqrt{32 \frac{q}{q'} - 23}\right)$$

$$y = \frac{1}{4} a \left(3 \mp \sqrt{32 \frac{q}{q'} - 23}\right),$$

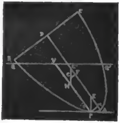
che ci danno due posizioni di equilibrio a causa dei segni che a due a due si corrispondono. Queste due posizioni non sono possibili che nel caso che $\frac{q}{q'}$ sia compreso fra $\frac{23}{32}$ e $\frac{24}{32}$. Se $\frac{q}{q'}$ sia $\frac{23}{32}$ queste posizioni si comprendono in una sola che è la (4) trovata quando vi si ponga $\frac{q}{q'} = \frac{23}{32}$.

Se poi $\frac{q}{q'}$ sia $\frac{24}{32}$ il prisma può galleggiare avendo due spigoli immersi nel liquido, uno alla superficie, ed uno fuori del liquido.

Sia ancora un altro galleggiante. Si suppone un cilindro retto di cui la base è contornata da un arco di parabola, e da una perpendicolare all'asse di questa curva. Si vuol determinare la posizione d'equilibrio di questo cilindro allorchè galleggia su di un fluido elevando la sua faccia piana interamente sul livello del fluido. Supporremo che la densità sia costante lungo ogni retta parallela alla generatrice, o che essendo omogeneo il solido sia gravato d'un peso.

In tal caso tutte le sezioni parallele alla base BAC del cilindro saranno le stesse in figura ed in disposizione di molecole onde basterà trattare della parabola materiale BAC.

Sia l'asse $AD=a$, l'inclinazione di questo asse all'orizzontale sia θ. Sia G il centro di gravità della parabola; condotta GF normale all'asse sia $AF=h$, $GF=k$. Sia P il punto della curva ove la tangente è orizzontale, e l'ordinata PM a questo punto sia y.



Si conduca PV parallela ad AD sarà essa un diametro della parabola, e QQ' parallela alla tangente sarà una doppia ordinata a questo diametro. Si ponga $PV=x$. Nel detto diametro dovendosi trovare il centro di gravità della parte QPQ' della parabola sia H questo centro onde

$$PH=\frac{3}{5}PV=\frac{3}{5}x.$$

Sia finalmente p il semiparametro o la metà della costante della equazione all'asse della parabola. Per H e G si conduca la retta HG, che seghi in G' l'asse, per la prima condizione dei galleggianti questa retta dovrà essere verticale. La posizione del galleggiante dipende dai valori di x, y che si debbono ricavare dalle due condizioni. Se da P si conduca PE parallela ad HG' sarà pur essa verticale, e perciò normale alla tangente in P: dunque EM sarà la sunnormale nella parabola, e perciò $EM=p$. Ora abbiamo l'indentità

$$(1)\quad AM+ME+EG'=AF+FG',$$

nella quale se si sostituiscano i valori colla condizione della HG' verticale essa esprimerà la prima condizione. Ora nella parabola

$$AM=\frac{y^2}{2p},\ ME=p,\ EG'=PH=\frac{3}{5}PV=\frac{3}{5}x.$$

Inoltre l'angolo $GG'F=HPE$: ma HPE è complemento

di θ; dunque cotang $GG'F = \text{tang}\theta = \frac{G'F}{GF}$, e $G'F = k\,\text{tang}\theta$: ma PEM è complemento di θ, dunque $FG' = \frac{kp}{y}$. Sostituendo questi valori nella (1) avremo

$$(2) \qquad \frac{y^2}{2p} + p + \frac{3x}{5} = h + \frac{kp}{y}.$$

Si deve ora esprimere l'altra condizione che la massa del corpo eguaglia la massa dell' acqua spostata. Se q sia la densità della parabola, e q' quella del fluido, dovrà essere

$$(3)\ q.\ BAC = q'.\ QPQ'. \text{ Ora } BAC = \frac{2}{3}\,AD.BC = \frac{2}{3}\,.\ 2a\sqrt{(2pa)} = \frac{4}{3}\,a\sqrt{(2pa)}.$$

Dicendo $2p'$ il parametro al diametro sarà

$$QPQ' = \frac{2}{3}\,PV.\ QQ'\ \text{sen}\theta = \frac{2}{3}\,x.2\sqrt{(2p'x\,\text{sen}^2\theta)}:$$

ma dalla teoria della parabola $p'\text{sen}^2\theta = p$ dunque $QPQ' = \frac{4}{3}\,x\sqrt{(2px)}$ sostituendo questi valori in (3) sarà

$$\frac{4}{3}\,qa\sqrt{(2pa)} = \frac{4}{3}\,q'x\sqrt{(2px)},$$

d'onde $x = a\left(\frac{q}{q'}\right)^{\frac{2}{3}}$ che sostituito nella equazione (2) sarà

$$y^3 - \left[2ph - 2p^2 - \frac{6}{5}\,pa\,\left(\frac{q}{q'}\right)^{\frac{2}{3}}\right]y - 2kp^2 = 0.$$

Questa equazione ci dice che le posizioni dell'equilibrio possono essere o una o tre.

Se il cilindro è omogeneo, sarà $k=0$, $h = \frac{3}{5}\,a$ e quindi

l'equazione antecedente darà $y=0$,

ed

$$y^2 - \frac{6}{5}\, pa \left[1 - \left(\frac{q}{q'}\right)^{\frac{2}{3}}\right] + 2p^2 = 0.$$

La prima ci dà una posizione d'equilibrio che è sempre possibile quando la densità del cilindro sia inferiore a quella del fluido. L'altra ci dà due posizioni simmetriche che sono impossibili quando

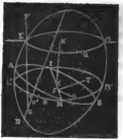
$$\frac{q}{q'} > \left(1 - \frac{5p}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

66. **Equilibrio stabile e non stabile d'un galleggiante.** L'equilibrio d'un galleggiante è *stabile* o *non stabile* secondochè questo corpo tende a ritornare alla sua primiera posizione o ad allontanarsene, quando ne sia di poco spostato.

Consideriamo ora un corpo in equilibrio sopra un fluido omogeneo : i centri di gravità di questo corpo , e del liquido scacciato sono situati in una medesima verticale, ed i pesi di questo liquido e del corpo sono uguali. Si supponga ora che esso sia spostato infinitamente poco in una maniera qualunque, essendo impresse a tutti i suoi punti delle velocità infinitamente piccole. Ora si può dire che se lo spostamento resta sempre infinitamente piccolo l'equilibrio è stabile, ed è non stabile in caso contrario perchè se per velocità infinitesime impresse si sposta di quantità finita, per velocità finita si sposterà indefinitamente. Tutto sta dunque a distinguere col calcolo l'uno e l'altro caso, il che si otterrà col principio stabilito in meccanica delle forze vive.

Sia LMQ la linea segnata sulla superficie del corpo dal piano di livello , o la linea del galleggiante : sia ANBI la posizione che essa ha preso dopo lo spostamento : L'NM'I la sezione fatta nel corpo dal piano orizzontale condotto pel centro di gravità C dell'area ANBI, che indichiamo con b.

Sia G il centro di gravità del corpo, O quello del liquido



escluso dalla parte ADB del corpo: V il volume di questo liquido di cui il peso è uguale a quello del corpo: θ l'angolo che fa GO' colla verticale GF; ζ la distanza del punto C dal livello, che sarà preso pel piano delle x, y; $GO'=a$.

Le forze che sollecitano il corpo sono il peso e le pressioni esercitate dal liquido sulla parte immersa. La prima si riduce ad una forza verticale agente da alto in basso ed uguale al peso del corpo, che è Mg, o ggV. Le pressioni poi producono il medesimo effetto come se tutti gli elementi della parte immersa del volume del corpo fossero sollecitati da forze verticali dirette da basso in alto, ed uguali ai pesi di questi elementi come se fossero elementi del fluido: dunque le componenti X, Y, sono nulle per tutti i punti: e se si prende l'asse delle z nel senso della gravità sarà $Z=g$ per tutti gli elementi del corpo; e $Z=-g$ per gli elementi della parte immersa considerati come elementi del fluido. Dopo ciò il principio delle forze vive ci darà l'equazione (1) $\Sigma v^2 dm = 2\Sigma dm \int Z dz + C$. Considerando piccolissime le velocità, il primo membro è piccolissimo di secondo ordine, e quindi nel secondo membro non si potranno trascurare che i termini, che produrranno infinitesimi superiori al secondo ordine.

Consideriamo da prima i termini del secondo membro che provengono dal peso degli elementi del corpo. Abbiamo dunque $\int Z dz = gz$, $2\Sigma dm \int Z dz = 2g\Sigma z dm = 2gMz$, ove z, è la coordinata del centro di gravità del corpo.

Quanto alla parte immersa noi la considereremo composta della parte compresa fra le sezioni orizzontali LQM,

L'NM'I, e del volume situato al di sotto della seconda; questo secondo volume è uguale al volume ADB o V aumentato del volume INBM', e diminuito di INL'A. Il valore di Z in questo caso è $-g$, onde $\int Zdz = -g(z-z_0)$, e questo integrale resterà costantemente uguale gz_0, quando z sarà negativo, divenendo allora nulla la forza Z. Comprendendo gz_0 nella costante totale avremo $\int Zdz = -gz$. Se dw indica l'elemento del volume, si avrà $dm = qdw$ e $2\Sigma dm \int Zdz = -2gq\int zdw$.

Or non resta più che calcolare per i quattro volumi che abbiamo indicati $\int zdw$, che è il momento relativo al piano delle x, y del volume della parte immersa nella posizione del corpo in un tempo qualunque.

Essendosi supposto infinitesimo lo spostamento, le diverse sezioni che abbiamo fatte nel corpo si possono supporre uguali alla b, e la porzione compresa fra le due sezioni parallele può essere riguardata come un cilindro: quindi per questa prima parte abbiamo $\int zdw = \frac{1}{2}b\zeta^2$. Pel volume ADB si avrà $\int zdw = V(z_1 - a\cos\theta)$, o ponendo $1 - \frac{\theta^2}{2}$ invece di $\cos\theta$, sarà $\int zdw = Vz_1 - Va + \frac{Va\theta^2}{2}$, se il punto O' è al di sopra di G: nel caso contrario si dovrà mutare il segno di a.

Il volume INBM' si può decomporre in elementi prismatici avendo i loro spigoli verticali, e per basi gli elementi dell'area ANBI.

Sia $d\lambda$ uno di questi elementi posto in R, RS$=u$ la normale abbassata sopra IN, ed RI l'altezza del prisma: il suo volume sarà $\mathrm{RI}d\lambda\cos\theta$, espressione che equivale ad $u\theta d\lambda$: moltiplicandola per la z del mezzo di RI che è $\zeta + \frac{1}{2}u\tan\theta$ o semplicemente $\zeta + \frac{1}{2}u\theta$ si avrà il valore di $\int zdw$ relativamente a questo elemento: si troverà così $u\theta d\lambda(\zeta + \frac{1}{2}u\theta)$, espressione, che si dovrà integrare in tutta l'estenzione dell'area INB.

Si troverebbe una espressione simile per gli elementi del volume INL'A eccettuata la z del mezzo del prisma che sarebbe $\zeta - \frac{1}{2} u\theta$; e poichè i termini provenienti da questo volume debbono essere cambiati di segno, saranno espressi da $-u\theta d\lambda(\zeta - \frac{1}{2}u\theta)$; donde si vede che basterà di fare la somma dei termini della forma $u\theta d\lambda(\zeta + \frac{1}{2} u\theta)$ in tutta l'estensione dell'area ANBI riguardando u come positivo nella parte INB, e come negativo nell'altra. Ma $\int u d\lambda$ è nulla poichè IN contiene il centro di gravità dell' area ANBI: dunque resta $\frac{\theta^2}{2} \int u^2 d\lambda$. Indicheremo per bh^2 l'espressione $\int u^2 d\lambda$, che si può chiamare il momento d'inerzia dell'area ANBI, relativamente ad NI; allora l'espressione antecedente diverrà $\frac{bh^2\theta^2}{2}$. Riunendo le diverse parti di $\int z dw$ avremo

$$\int z dw = \tfrac{1}{2} b\zeta^2 + \tfrac{1}{2} bh^2\theta^2 + Vz_1 - Va + \frac{Va\theta^2}{2},$$

e l'equazione (1) diviene, osservando che $M = qV$ e comprendendo $2gqVa$ nella costante

$$(2)\ \Sigma v^2 dm = -gqb\zeta^2 - gq(bh^2 + aV)\theta^2 + C.$$

Se O' è al disotto di G si deve cambiare a in $-a$.

La costante si determina per la situazione iniziale del sistema e se le velocità iniziali sono nulle, o infinitamente piccole la C sarà ancor tale.

Ciò posto il primo membro dell'equazione (2) essendo essenzialmente positivo, lo dovrà essere ancora il secondo e perciò i termini negativi debbono dare costantemente una somma infinitamente piccola perchè deve essere minore di C, ciò che indica dover θ, e ζ rimanere infinitamente piccole. Da ciò si conchiude *che allorquando il centro di gravità del corpo è al di sotto del centro di gravità del liquido scacciato nello stato d'equilibrio, lo spostamento resterà sempre infinitamente piccolo, ed in conseguenza l'equilibrio sarà stabile.*

Ma se il centro di gravità del corpo sarà al disopra di quello del liquido scacciato la formola (2) si cambia nella segnente $\Sigma u^2 dm = -gqb\zeta^2 - gq(bh^2 - aV)\theta^2 + C$ ora quantunque C sia infinitamente piccola θ, e ζ potrebbero non esserlo se tutti i termini che contengono i loro quadrati non fossero negativi. Egli è dunque necessario per la stabilità dell'equilibrio che si abbia $bh^2 - aV > 0$, o $a < \frac{bh^2 z}{V}$; e poichè bh^2 cambia come cambia la direzione di IN, è necessario che l'inuguaglianza antecedente abbia luogo prendendo il più piccolo valore di cui bh^2 è suscettibile quando si suppone che IN prenda tutte le direzioni intorno al centro di gravità C dell'area ANBI.

Dunque l'equilibrio può essere ancora stabile allorchè il centro di gravità del corpo è al di sopra di quello del fluido scacciato; in tal caso basta che la distanza di questi due punti sia minore del più piccolo dei momenti d'inerzia dell'area della sezione a fior d'acqua per rapporto alle rette condotte pel suo centro di gravità, questo momento diviso pel volume del corpo immerso.

Dopo ciò sia il problema. *Quale è la condizione di stabilità per una prisma rettangolare omogeneo, di cui la base è orizzontale relativamente agli spostamenti paralleli alle faccie verticali.*

Siano a, b i due lati della base, c l'altezza, q q' le densità del corpo e del liquido.

Il volume immerso è $\frac{qabc}{q'}$.

L'altezza del centro di gravità del prisma al di sopra del centro di gravità del fluido scacciato è $\frac{c}{2}\left(1 - \frac{q}{q'}\right)$.

Il momento d'inerzia della sezione e fior d'acqua rispetto un asse condotto dal centro di questa pressione parallela-

mente al lato b ha per espressione $\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} bx^2 dx = \frac{1}{12}\, ba^3$ quindi la condizione di stabilità per gli spostamenti paralleli alla faccia (ac) sarà

$$\frac{c}{2}\left(1-\frac{q}{q'}\right) < \frac{\frac{1}{12}\, ba^3}{\frac{q}{q'}\, abc},$$

ossia

$$\frac{a^2}{c^2} > 6\,\frac{q}{q'}\left(1-\frac{q}{q'}\right).$$

L'equilibrio sarà instabile se il primo membro sie inferiore al secondo; e sarà indifferente se i due membri saranno uguali.

Trovare la condizione di stabilità per un cono retto omogeneo, di cui l'asse è verticale, ed il vertice è dentro il liquido.

Se r è il raggio della base, h l'altezza del cono, q, q' le densità come sopra, la condizione è

$$\frac{r^2}{h^2} > \frac{q'^{\frac{1}{3}} - q^{\frac{1}{3}}}{q^{\frac{1}{3}}}.$$

Trovare la condizione di stabilità per un cilindro omogeneo di cui l'asse è verticale.

Se si dice r il raggio della base, h l'altezza, q, q' le due densità, la condizione è

$$\frac{r^2}{h^2} > 2q\,\frac{q'-q}{q'^2}.$$

Trovare la condizione di stabilità per un paraboloide omogeneo di rivoluzione terminato da un piano perpendicolare all'asse, e di cui l'asse è verticale.

Se p è il parametro della parabola generatrice, b la lunghezza dell'asse, e q q' le densità sarà.

$$\frac{3p}{2b} > 1 - \sqrt{\frac{q}{q'}} .$$

CAPO X.

Dei fluidi elastici.

67. **Formola generale dei fluidi pesanti ridotta ai fluidi elastici.** La formola generale dell'equilibrio dei fluidi pesanti è $dp = qdz$. Se si tratta dei fluidi elastici si dovrà porre in questa formola il valore della pressione o della densità che caratterizza questi fluidi. Ora dalla fisica generale sappiamo che nei fluidi elastici la densità è come la pressione, o come la così detta *tensione dei fluidi*, dunque $q = mp$ ove m è la ragione della densità alla pressione, quindi $dp = mpdz$; $\frac{dp}{p} = mdz$, $l.p = mz + C$. Se si esprima con p_0 la pressione nel piano delle x, y dove cominciano le z, avremo $l.p_0 = C$, ed in ultimo $p = p_0\ e^{mz}$ (a).

Per li fluidi elastici della natura il coefficiente m è molto piccolo in guisachè se la grossezza z del fluido non è assai grande, il fattore e^{mz} può considerarsi come uno ed allora la pressione in questo tratto sarà costante perchè abbiamo $p = p_0$.

68. **Applicazione della detta formola.** Per applicazione della formola antecedente (a) supponiamo un cilindro verticale chiuso da due piani normali all'asse, e ripieno di fluido elastico, e determiniamo la pressione totale contro la superficie interna della parete verticale.

Sia a l'altezza, c la circonferenza interna del cilindro, p_0 la tensione al piano supremo del fluido, e z la distanza di una sezione orizzontale del fluido dal detto piano: per la domandata pressione p avremo l'eqnazione

$$p = cp_0 \int_0^a e^{mz} dz = \frac{cp_0}{m} (e^{ma} - 1)$$

$$= \frac{cp_0}{m} \left(\frac{ma}{1} + \frac{m^2a^2}{1.2} + \text{etc} \right).$$

Se m è piccolissimo, come avviene nell'aria, ed a non sia assai grande, avremo $p = cap_0$.

69. **La detta formola ridotta all'aria atmosferica.**

Per applicare la formola $dp = mpdz$ all'aria atmosferica, computiamo le z all'insù dal punto più basso della terra, che è il livello del mare: imperocchè il livello supremo dell'aria è una delle incognite da ricavarsi dalla nostra formola. In detta ipotesi basterà cambiare la dz in $-dz$, perchè l'incremento della z nella prima ipotesi è decremento nella seconda: avremo dunque $dp = -mpdz$, $l.p = -mz + C$. Esprimendo per P la pressione al livello del mare ove $z=0$, avremo $l.\frac{P}{p} = mz$.

Le pressioni dell'aria atmosferica sono proporzionali alle elevazioni del barometro ad nguali temperature: esprimendo dunque per A l'altezza del barometro al livello del mare, e per a l'altezza ad una elevazione z nell'atmosfera, avremo $p = ra$, $P = rA$, ove r è nna quantità costante. Sostituendo questi valori nell' equazione antecedente, avremo $l.\frac{A}{a} = mz$, ed $a = Ae^{-mz}$.

Da questa equazione si ricava che crescendo le elevazioni nell'aria dal livello del mare in progressione aritmetica, le

altezze del barometro, le pressioni e le densità dell'aria decrescono in progressione geometrica.

Dall'equazione $l.\ \frac{A}{a}=mz$, ricavandosi $z=\frac{1}{m}\ (l.A-l.a)$, si vede che le elevazioni dei diversi punti sopra il livello del mare sono in ragione delle differenze dei logaritmi neperiani delle altezze barometriche ne li due estremi delle dette elevazioni.

Nell'equazione $l.\ \frac{p}{P}=-mz$, per quanto sia piccola la p si troverà sempre il corrispondente valore di z; ma se sia $p=0$, ossia se sia tratti della sommità dell'atmosfera, poichè tra l'espressioni assurde si trova il domandare il logaritmo di zero, si vede che l'equazione antecedente non si presta a quella estremità. Quindi se si volesse determinare l'elevazione dell'aria atmosferica, si dovrebbe domandare l'altezza dove lo strato d'aria ha la minima densità che si conosca per mezzo delle nostre macchine pneumatiche. Ora essendo le pressioni proporzionali alle densità, se si dicano D, d le densità dell'aria, al livello del mare e la minima densità, si avrà $l.\ \frac{D}{d}=-mz$: d'onde si potrà trovare la z quando si conosca la m che or ora troveremo.

70. **Formola per determinare le altezze per mezzo del barometro.** L'equazione $z=\frac{1}{m}\ (l.\ A-l.\ a)$, serve per trovare le altezze, perchè basta vedere quali siano l'elevazioni del barometro A, a, al livello del mare, ed a quella altezza che si vuol trovare. Ma si deve trovare primamente la costante $\frac{1}{m}$. Questa costante ha luogo ragionevolmente nella nostra equazione, perchè in un equazione che esprime un caso della natura trovandosi la particolarità venuta

dal calcolo cioè dai logaritmi neperiani, vi deve essere un modulo che riduca questi logaritmi ai logaritmi di una base che si acconci colla natura.

Per ottenere il valore di questo modulo si rifletta che l'altezza del barometro al livello del mare, a gradi zero di temperatura è metri 0.76. Dopo ciò domando a quale altezza si deve montare perchè l'elevazione del barometro cali di un millimetro e dalla elevazione di $0^m.760$, diventi $0^m.759$. Ora domandare a quale altezza si deve montare perchè il barometro cali di un millimetro, è domandare la colonna d'aria che fa equilibrio con un millimetro di mercurio, sopra la qual colonna montando, il millimetro di mercurio non sostenuto s'abbassa. Posso dunque immaginare un tubo ricurvo, dove sopra un comun piano orizzontale in un braccio si elevi un millimetro di mercurio, e nell'altro braccio la detta colonna d'aria che lo equilibra: ora queste due altezze debbono essere (57) in ragione inversa delle densità del mercurio e dell'aria: ma la densità del mercurio a quella dell'aria è come 10485 ad 1, dunque l'altezza z della detta colonna d'aria, sarà data da

$$\frac{z}{0^m.001} = \frac{10485}{1},$$

e $z=10^m.485$. Ora nella formola $z=\frac{1}{m}$ $(l.\ A-l.\ a)$ si faccia $A=0^m.760$, $a=0.759$ $z=10^m.485$, ed avremo

$$\frac{1}{m} = \frac{10^m.485}{0.0005718164} = 18336.$$

Il denominatore 0.0005718164 è la differenza dei logaritmi di 760, e di 759, logaritmi presi nella base 10. A rigore doveva essere $l.\ 0.\ 760-l.\ 0.\ 759$, ma questa differenza è $l.\ \frac{760}{1000}\quad l.\ \frac{759}{1000}=l.760-l.759-l.1000+l.1000$. Si sono

presi poi i logaritmi non nepariami ma i comuni nella base 10, perchè sostituendo il valore trovato di $\frac{1}{m}$ in $z=\frac{1}{m}$ $(l.A.—l.a)$, quando abbiamo

$$z=\frac{10^m.485}{0.0005718164}\ (l.A.-l.a),$$

essendovi nel denominatore di $l.A.—l.a$ un logaritmo di base 10, bisogna che anche in quella differenza $l.A.—l.a$ i logaritmi siano presi nella base 10, perchè è costante il quoto de'logaritmi per qualunque base: dunque nell'equazione finale $z=18336\ (l.A.—l.a)$, si devono prendere per logaritmi i logaritmi comuni.

71. **Correzione della formola delle altezze.** Questa formola però si basa nel fatto che la temperatura sia zero, quindi per tutt'altra temperatura è necessario introdurvi una modificazione, e questa è doppia, perchè nell'indicata formola vi è la colonna dell'aria atmosferica di $10^m.485$, e vi sono le altezze barometriche $0^m.760$, $0^m.759$, A, a; quindi la modificazione deve riguardare ambedue i fluidi. Sia dunque T la temperatura dell'aria al livello del mare, e t all'altezza $10^m.485$: si prenda la media aritmetica $\frac{T+t}{2}$ e questa si potrà senza errore sensibile supporre la temperatura costante della detta colonna d'aria. Ora si sa dall'esperienza che per ogni grado di temperatura l'aria si dilata d'un suo 0,00375, dunque per i gradi di temperatura $\frac{T+t}{2}$ si dilaterà di $\left(\frac{T+t}{2}\right)0.00375$ del suo volume, dunque per questi gradi la detta colonna diventerà

$$10^m.485+10^m.485\left(\frac{T+t}{2}\right)0.00375$$
$$=10^m.485\left[1+\left(\frac{T+t}{2}\right)0.00375\right].$$

72. Ma si deve osservare che quando la temperatura si eleva, generalmente parlando, la quantità di vapore aumenta nell'atmosfera, e poichè la densità del vapore è a quella dell'aria come $10 a 16$ sotto la pressione ordinaria di $0^{m}.76$, ne segue che la densità dell'aria libera di cui la temperatura aumenta deve diminuire in un più grande rapporto che quello che corrisponde al coefficiente 0.00375. Per valutare quanto è possibile la quantità di vapore che si trova nell'atmosfera si dovrà aumentare un poco l'antecedente frazione, e per comodo del calcolo si farà 0.004, quindi la superiore colonna d'aria (§ 71) sarà

$$10^{m}.485\left[1+\frac{2(T+t)}{1000}\right].$$

Il denominatore di $10^{m}.485$ (§ 70) è $l.760-l.759$, che è la differenza de' logaritmi dei numeri relativi alle elevazioni del barometro nel punto basso e più alto di $10^{m},485$. Si dicano ora T', t' le temperature del mercurio in queste due stazioni, sarà $T'-t'$ di quanto la temperatura del punto più basso è maggiore di quella del punto più alto; quindi il barometro nel punto inferiore oltre l'altezza barometrica avrà una altezza termometrica che non ha il barometro al punto più alto: ma l'indicata differenza di logaritmi deve essere relativa alle sole elevazioni barometriche, dunque per compensare all'elevazione barometrica nella stazione più alta si deve dare l'elevazione termometrica della stazione inferiore. Ora sappiamo che il mercurio per ogni grado di temperatura si dilata del $\frac{1}{5550}$ del suo volume, dunque per i gradi $T'-t'$ si dilaterà del $\frac{T'-t'}{5550}$ del suo volume, perciò il 759 diventerà

$$759\left[1+\left(\frac{T'-t'}{5550}\right)\right],$$

dunque il coefficiente di $l.\mathrm{A}-l.a$ sarà

$$\frac{10^{m}.485\left[1+\left(\frac{\mathrm{T}-t}{1000}\right)\right]}{l.760-l.759\left[1+\left(\frac{\mathrm{T}'-t'}{5550}\right)\right]}.$$

Da molte osservazioni si ricava potersi trascurare $\frac{\mathrm{T}'-t'}{5550}$, e potersi prendere per T, e t le temperature al livello del mare e all'altezza che si vuol misurare, e per compensare ciò di che si diminuisce il coefficiente di $l.\mathrm{A}-l.a$ per queste due modificazioni, invece del numero 18336 che risulta da $10^{m}.485$ diviso per 0.0005718164 si può porre 18393. Riguardo alla correzione da farsi nel fattore $l.\mathrm{A}-l.a$ si dica T′ la temperatura del mercurio al livello del mare e t' la temperatura all'altezza z; ragionando come innanzi si vedrà, che in luogo di a si dovrà porre

$$a\left(1+\frac{\mathrm{T}'-t'}{5550}\right).$$

dunque la formola che serve per misurare le altezze col barometro è

$$z=18393^{m}\left[1+2\left(\frac{\mathrm{T}+t}{1000}\right)\right]\mathrm{L}.\frac{\mathrm{A}}{a\left(1+\frac{\mathrm{T}'-t'}{5550}\right)}.$$

73. In questa formola i logaritmi sono i comuni nella base 10; si è tenuto a conto anche l'influenza dei vapori, ma non si è introdotta la gravità, che in una altezza considerabile z avrebbe dovuto seguir la legge dell'attrazione universale. Infatti non vi doveva entrare, perchè nell' equazione $dp=qdz$ quando abbiamo posto $q=mp$, se avessimo

posto $q = mgp$, si sarebbe dovuto anche scrivere gdp in luogo di p, il che avrebbe fatto sparire la gravità.

74. La formola superiore (§ 72) per la misura delle altezze è basata sull'artifizio del domandare l'elevazione per la quale il barometro cala d'un millimetro, ed ha ammesso una modificazione per osservazioni degli idraulici. Si può però dar metodo ed assegnar formola indipendentemente da tutto ciò. A questo fine da chi si determina a trovare altezze per mezzo del barometro, si scelga un'altezza nota z' e alle due stazioni inferiore e superiore si notino le altezze a', A' del barometro e le sue temperature t', T', allora la formola $z = m(l.A - l.a)$ diventerà

$$z' = m\left[l.A' - l.a'\left(1 + \frac{T'-t'}{5550}\right)\right]$$

e quindi

$$m = \frac{z'}{L.\dfrac{A'}{a'\left(1 + \dfrac{T'-t'}{5550}\right)}},$$

che sostituito nel valore di z ci darà

$$z = \frac{z'}{L.\dfrac{A'}{a'\left(1 + \dfrac{T'-t'}{5550}\right)}} L.\frac{A}{a\left(1 + \dfrac{T-t}{5550}\right)};$$

ove il T, t sono le temperature del mercurio nelle due stazioni dell'altezza z che si vuol trovare.

CAPO XI.

Equilibrio relativo delle molecole d'un fluido.

75. **Idea dell'equilibrio relativo.** Facilmente si può immaginare, che un fluido muovendosi uniformemente intorno ad un asse mantenga fra i suoi punti costantemente la stessa posizione, come quando le molecole fossero attratte da un centro interno, o il liquido fosse dentro un vaso che girasse intorno al suo asse. In questo caso non si avrà un equilibrio assoluto, ma uno relativo tra le molecole del fluido, perchè conservano invariabile la loro posizione rispettiva.

76. **Equazione dell'equilibrio relativo.** In un cotal moto le forze dalle quali è animato il fluido sono le applicate a le forze centrifughe dei diversi punti: quindi tra queste forze vi deve essere equilibrio. Per aver dunque la formola d'equilibrio in questo caso basterà aggiungere al trinomio $Xdx+Xdy+Zdz$ la forza centrifuga moltiplicata pel differenziale della retta secondo la quale agisce, e ciò viene dalla natura dell'equazione generale dell'equilibrio dei fluidi (Idrost. § 3).

Si suppongano gli assi delle x, y orizzontali, e quello dello z verticale all'insù, e sia l'asse delle z quello della rotazione. Sia ω la velocità angolare del sistema, ed r la distanza d'un punto dall'asse di rotazione. La velocità del detto punto sarà $r\omega$; la forza centrifuga è il quadrato della velocità diviso per la distanza dall'asse: dunque sarà $r\omega^2$; quindi al detto trinomio si dovrà aggiungere $r\omega^2 dr$. Ora $r=\sqrt{(x^2+y^2)}$: dunque

$$r\omega^2 dr = \omega^2 x dx + \omega^2 y dy:$$

quindi l'equazione d'equilibrio sarà

$$(a)\quad dp=q(Xdx+Ydy+Zdz+\omega^2 xdx+\omega^2 ydy)$$

77. **Applicazione dell'equazione antecedente.** Per farne una applicazione *supponiamo un vaso cilindrico di*

raggio a *che contenga un fluido pesante omogeneo ad una altezza* h. *Abbia poi questo vaso una rotazione uniforme intorno all'asse, e le molecole abbiano acquistato una posizione rispettiva invariabile; si vogliono ricavare dalla formola antecedente le proprietà di questo moto.* Sia il piano delle x, y la base del cilindro. Nel nostro caso $Z=-g$, $X=0$, $Y=0$: perciò l'equazione (6) diventerà

$$dp=-qg dz+q\omega^2 x dx+q\omega^2 y dy.$$

Si domandi in primo luogo la superficie di livello sarà $dp=0$ e quindi

$$-g dz+\omega^2 x dx+\omega^2 y dy=0$$

che integrata ci da

$$x^2+y^2=\frac{2g}{\omega^2}(z-c),$$

ove c è la costante arbitraria. Si vede che la figura è un paraboloide di parametro $\frac{2g}{\omega^2}$, e che c è la distanza del vertice del paraboloide dal fondo del vaso. Determiniamo la costante. Per ciò si rifletta che il volume del fluido in moto è uguale a quello $\pi a^2 h$ del fluido in quiete. Ora il volume del fluido in moto è un cilindro $\pi a^2 z$, meno il volume vuoto del paraboloide, dunque sarà

$$\pi a^2 z-\frac{\pi g}{\omega^2}(z-c)^2,$$

dove la z è la distanza dal fondo dalla circonferenza, in cui il paraboloide, o il fluido tocca il cilindro; ora questa z si ottiene dall'equazione

$$x^2+y^2=\frac{2g}{\omega^2}(z-c)$$

ponendovi a^2 invece di x^2+y^2, il che fatto abbiamo

$$z=c+\frac{a^2\omega^2}{2g}.$$

Avendo ora

$$\pi a^2 z - \frac{\pi g}{\omega^2}(z-c)^2 = \pi a^2 h$$

se in queste si pone il valore antecedente di z troveremo

$$c = h - \frac{a^2\omega^2}{4g}:$$

dunque l'equazione della superficie di livello sarà

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\left(z + \frac{a^2\omega^2}{4g} - h\right).$$

Per avere la formola della pressione s'integri l'equazione

$$dp = -gqdz + q\omega^2(xdx + ydy)$$

ed avremo

$$p = -gqz + q\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + c'.$$

Per determinare la c' portiamo l'integrale alla superficie di livello e precisamente alla circonferenza, ove il fluido tocca il cilindro; si dovrà sostituire nell'equazione antecedente a^2 invece di $x^2 + y^2$, ed invece di z,

$$c + \frac{a^2\omega^2}{2g},$$

o ponendovi il valore di c si dovrà sostituire invece di z

$$h + \frac{a^2\omega^2}{4g},$$

ed in luogo di p si porrà una pressione A costante, quindi avremo

$$c' = A - \frac{a^2\omega^2}{4} q + gqh.$$

Dai risultamenti antecedenti si rileva che il punto del fluido che era sull'asse nello stato d'equilibrio si è abbassato di

tanto di quanto si è elevato il circolo del fluido a contatto col cilindro. Infatti quel punto nel moto è giunto ad una altezza

$$c=h-\frac{a^2\omega^2}{4g}$$

dall'altezza h, e quel circolo dall'altezza h si è elevato

$$z=h+\frac{a^2\omega^2}{4g}:$$

dunque da una stessa altezza uno si è abbassato di $\frac{a^2\omega^2}{4g}$ e l'altro si è elevato dello stesso valore.

78. **Altra applicazione.** Per un altro esempio *s'immagini un cilindro, dentro il quale sia un fluido omogeneo, che in quiete abbia galleggiante un cilindro, il di cui asse coincida con quello del primo, e che questa coincidenza rimanga nella rivoluzione uniforme del sistema intorno l'asse comune; stabilito l'equilibrio nella rivoluzione, essendo il cilindro galleggiante meno elevato che nel caso dell' equilibrio primitivo, si domanda d'esprimere la differenza d' altezza dovuta alla rotazione in funzione della velocità angolare* ω *e dei raggi* A, a *del vaso e del cilindro galleggiante.* Abbiamo $dp=q\ (-qdz+\omega^2rdr)$, quindi $p=q(-gz+\frac{1}{2}\omega^2r^2)+C$. Siano P il peso del liquido contenuto contenuto nel vaso, Q il peso del liquido scacciato dal galleggiante, c la distanza del vertice del paraboloide dal fondo del vaso, ed h la distanza della base immersa del galleggiante dal medesimo piano : avremo pel volume immerso del galleggiante

$$\frac{Q}{gq}=\pi a^2\left(c-h+\frac{\omega^2\alpha^2}{4g}\right),$$

e pel volume del liquido aumentato del volume immerso

$$\frac{P+Q}{gq}=\pi A^2\left(c+\frac{\omega^2 A^2}{4g}\right).$$

Eliminando c fra queste equazioni avremo

$$h=\frac{1}{\pi g q}\left(\frac{P+Q}{A^2}-\frac{Q}{a^2}\right)-\frac{\omega^2}{4g}(A^2-a^2).$$

In questo valore il termine $\frac{\omega^2}{4g}$ (A^2-a^2), che solo dipende da ω e s'annulla con questa velocità, misura la differenza d'altezza dovuta alla rotazione

Una sfera vuota esattamente riempita da un liquido, e che ha un piccolo orifizio nella sua estremità inferiore, gira uniformemente intorno al suo diametro verticale. Si domanda la velocità di rotazione che impedisce al liquido di uscire tutto intero dall'orifizio. Se r è il raggio della sfera la velocità angolare domandata è $\sqrt{\frac{g}{r}}$.

Un vaso di dimensioni cognite, che ha la forma d'un cono retto aperto nella sua base gira con una velocità angolare costante intorno al suo asse che è verticale. Si domanda quale è il volume del liquido che può contenere in questo stato di rotazione; e quale è la più piccola velocità che non permette ad alcuna molecola del fluido di rimanere dentro il vaso. Sia h l'altezza del cono, r il raggio della base. Per una velocità qualunque di rotazione ω il valore del fluido contenuto nel vaso è al più uguale al volume che riempirebbe il vaso diminuito di $\frac{\pi\omega^2 r4}{4g}$. La più piccola velocità ω che caccia tutto il liquido del vaso è $\frac{2}{r}\sqrt{\frac{gh}{3}}$.

Un cilindro di rivoluzione, che contiene una massa d'aria cognita, gira uniformemente intorno al suo asse insieme coll'aria che racchiude; determinare la densità dell'aria in un

punto dato, e la pressione totale esercitata sulla superficie laterale del cilindro supponendo il fluido non pesante , ciò che poco si allontana del vero in un recipiente di comune grandezza. Sia M la massa del fluido, k il rapporto costante della pressione alla densità, r il raggio interiore del cilindro, h la sua altezza ed ω la velocità di rotazione. Le densità del fluido ad una distanza a dall'asse è

$$\frac{M\omega^2}{2\pi hk}\,\frac{e^{\frac{\omega^2a^2}{2k}}}{e^{\frac{\omega^2r^2}{2k}}-1}\;;$$

e per conseguenza la pressione totale contro la superficie curva è

$$Mr\omega^2.\,\frac{e^{\frac{\omega^2a^2}{2k}}}{e^{\frac{\omega^2r^2}{2k}}-1}$$

Una mezza sfera vuota ed omogenea rovesciata su d'un piano orizzontale è esattamente riempita da un liquido omogeneo di densità data q. *Ora tutto il sistema gira intorno all'asse della mezza sfera con una velocità angolare costante* ω *; determinare il più piccolo peso , che possa avere la semisfera senza che il liquido fugga sollevandola.* Dicendo r il raggio interiore della sfera, il peso domandato è almeno

$$\pi qr^3\left(\frac{1}{3}\,g+\frac{1}{4}\,\omega^2r\right).$$

Nel caso che un liquido dentro un cilindro, che si muove con velocità angolare costante ω, *sia animato da una forza verso un centro fisso e proporzionale alla distanza da questo punto, trovare l'equazione della superficie libera.* Se f è la forza alla distanza unità, e se il piano delle x, y sia nel fondo del vaso, e le z siano verticali verso l'alto, l'equa-

zione domandata è $x^2+y^2+\frac{fz^2}{f-\omega^2}=C$. Essendo questa equazione delle superficie di 2° ordine di rivoluzione discuterla per ricavarne i diversi casi tutti dipendenti dalla relazione fra f ed ω.

Un cilindro circolare è riempito esattamente di un liquido omogeneo di densità cognita q, *e chiuso da un piano della circonferenza interna del cilindro che si può aprire e chiudere per mezzo d'una cerniera fissa alla parete. Il sistema gira intorno l'asse del vaso con una velocità angolare costante* ω, *determinare il più piccolo peso del coperchio onde il liquido non valga a sollevarlo, e quindi a farlo fuggire dal vaso.* Se r è il raggio interno del cilindro, si trova che il peso domandato è $\frac{1}{4}\pi q\omega^2 r^4$.

Un cilindro circolare e verticale, che contiene una quantità di liquido, il di cui peso congiunto a quello del vaso è Q, *è legato ad un peso mobile* P *pendente da una funicella scorrevole non pesante che passa per la gola d'una girella. Il sistema sale, o scende sotto l'azione del peso, mentre che il vaso rota intorno al suo asse con una velocità angolare costante* ω. *Si suppone che il liquido sia giunto allo stato d'equilibrio relativo, in cui la figura è invariabile, e si domanda di determinare la forma della superficie libera.* Questa è un paraboloide di rivoluzione intorno all'asse del vaso ed il parametro della parabola generatatrice è

$$\frac{2P}{P+Q}\,\frac{g}{\omega^2}:$$

PARTE TERZA

IDROCINAMICA

CAPO I.

Formole generali del moto dei fluidi.

1. **Si precisa cosa è moto di un fluido.** Come l'equilibrio di un fluido si è ridotto all'equilibrio di una sua molecola qualunque infinitesima (Idros. § 1): così il moto d'un fluido è il moto di una sua molecola qualunque infinitesima. Infatti quando in cotal molecola siano valutate, come si è fatto (Idrod. § 17), tutte le forze intrinsiche ed estrinseche dalle quali è animata, la molecola è al tutto isolata, perchè l'azione del liquido circostante è espressa dalla pressione, e perchè col detto liquido non ha forza di coesione valutabile (Proe. § 2) a causa del suo slegamento.

2. **Condizione fisica nel moto dei fluidi.** Nel moto dei fluidi oltre alle formole fra i quattro elementi del moto come in quello dei solidi, vi si richiede la condizione algebraica che esprima, che la molecola in proposito durante il moto si mantiene integra nella sua massa senza dividersi o sparpigliarsi nelle sue parti interponendovisi altri punti materiali del fluido. Questa condizione dicesi *condizione di*

continuità del fluido, ed è evidente da ciò che si è detto consistere questa nell'esprimere, che è nulla la variazione della massa della molecola durante il moto.

3. **Condizione algebraica della continuità del fluido.** Abbiamo trovato (Idrod. § 20) che il volume della molecola infinitamente poco traslocata è

$$(1)\quad dx dy dz\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)dt+\left(\frac{dv}{dy}\right)dt+\left(\frac{dw}{dz}\right)dt\right].$$

La densità della molecola nel punto di coordinate x, y, z e nel tempo t sia q. Questa densità nell'idrocinamica è funzione delle quattro variabili x, y, z, t, perchè dipende dalla località della molecola, e dal tempo durante il di lei moto. Imperocchè generalmente parlando in un determinato tempo la molecola varia di densità secondo i diversi luoghi dove si trova; ed in uno stesso luogo secondo la durata maggiore o minore del tempo del moto essa vi si trova con maggiore o minore densità. Per trovare l'espressione della densità della molecola traslocata dovremo trovare che cosa diventa la q per la variazione infinitesima delle quattro variabili. Si avverta però che la variazione della densità essendo prodotta dal moto o dal traslocamento della molecola, li differenziali delle coordinate sono a rigore δx, δy, δz, e sono spazii infinitesimi percorsi, e perciò uguali alle rispettive velocità moltiplicate nel differenziale del tempo; cioè udt, vdt, wdt: quindi la domandata densità sarà espressa da

$$q+\left(\frac{dq}{dt}\right)dt+\left(\frac{dq}{dx}\right)\delta x+\left(\frac{dq}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{dq}{dz}\right)\delta z,$$

ossia

$$(2)\quad q+\left(\frac{dq}{dt}\right)dt+\left(\frac{dq}{dx}\right)udt+\left(\frac{dq}{dy}\right)vdt+\left(\frac{dq}{dz}\right)wdt.$$

Se questa densità si moltiplica pel volume superiore (1)

della molecola traslocata, darà la di lei massa. In questa moltiplicazione si ritenga la quantità finita e gl' infinitesimi di primo ordine; perciò dentro parentesi della formola (1) si moltiplichi prima tutto per q, e poi l'unità per la quantità che viene appresso al q nella formola (2): avremo dopo ciò per la ricercata massa

$$dxdydz\Big[q+q\Big(\frac{du}{dx}\Big)dt+q\Big(\frac{dv}{dy}\Big)dt+q\Big(\frac{dw}{dz}\Big)dt$$
$$+\Big(\frac{dq}{dt}\Big)dt+\Big(\frac{dq}{dx}\Big)udt+\Big(\frac{dq}{dy}\Big)vdt+\Big(\frac{dq}{dz}\Big)wdt\Big].$$

In questa se si toglie q, avremo per la variazione della massa

$$(3)\quad dxdydz\Big\{\Big(\frac{dq}{dt}\Big)dt+\Big[q\Big(\frac{du}{dx}\Big)+u\Big(\frac{dq}{dx}\Big)\Big]dt$$
$$+\Big[q\Big(\frac{dv}{dy}\Big)+v\Big(\frac{dq}{dy}\Big)\Big]dt+\Big[q\Big(\frac{dw}{dz}\Big)+w\Big(\frac{dq}{dz}\Big)\Big]dt\Big\}$$

Ora si vede chiaro che

$$q\Big(\frac{du}{dx}\Big)+u\Big(\frac{dq}{dx}\Big)$$

è il coefficiente differenziale del prodotto qu relativamente alla x, e così si dica degli altri analoghi binomi: dunque la variazione della massa della molecola traslocata sarà

$$dxdydz\Big[\Big(\frac{dq}{dt}\Big)dt+\Big(\frac{d.\,qu}{dx}\Big)dt+\Big(\frac{d.\,qv}{dy}\Big)dt+\Big(\frac{d.qw}{dz}\Big)dt\Big];$$

se questa espressione si uguaglia a zero, l'equazione proveniente

$$(4)\qquad \frac{dq}{dt}+\Big(\frac{d.\,qu}{dx}\Big)+\Big(\frac{d.\,qv}{dy}\Big)+\Big(\frac{d.qw}{dz}\Big)=0$$

sarà la condizione algebraica della continuità del fluido.

4. **La condizione della continuità del fluido si modifica per li due casi dei fluidi compressibili ed incompressibili.** Se il fluido è compressibile o elastico ha luogo l'equazione (4). Se poi il fluido è incompressibile ciò vuol dire che è nulla la variazione del suo volume, dunque abbiamo l'equazione

$$(5)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0\,;$$

quindi l'espressione (3) che deve essere zero ci da

$$(6)\qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{dq}{dx}\right)u+\left(\frac{dq}{dy}\right)v+\left(\frac{dq}{dz}\right)w=0\,:$$

perciò per li fluidi incompressibili abbiamo le due condizioni (5), (6).

5. Se il fluido incompressibile sia omogeneo, o di densità costante, andando a zero i singoli termini della (6), abbiamo la (5).

7. **Formole generali del moto dei fluidi fra i quattro elementi del moto.** Queste formole si chiamano *equazioni delle forze sollecitanti.* Abbiamo trovato, (Idrod. § 2) per le forze totali dalle quali è animata la molecola infinitesima, l'espressioni

$$(a)\qquad \left[qX-\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]dxdydz$$

$$\left[qY-\left(\frac{dp}{dy}\right)\right]dxdydz\quad \left[qZ-\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]dxdydz\,.$$

Ora dalla meccanica abbiamo che

$$\frac{du}{dt}\,,\ \frac{dv}{dt}\,,\ \frac{dw}{dt}$$

esprimono le forze secondo i tre assi, dalle quali è animata una massa presa per unità: dunque per uguagliare li quan-

titativi di forze (a) a queste espressioni fu d'uopo dividerle per la massa $q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ onde ridurle all'unità di massa. Fatto ciò avremo per l'equazioni domandate

$$(6)\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=X-\frac{1}{q}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right),\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=Y-\frac{1}{q}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=Z-\frac{1}{q}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right).$$

8. **Le stesse formole colle differenzazioni delle funzioni rispetto tutte le loro variabili.** Nelle formole (6) antecedenti li differenziali delle u, v, w, t sono variazioni, e queste variazioni sopra le u, v, w debbono essere riguardo le quattro variabili x, y, z, t, delle quali sono funzioni, avvertendo come (§ 3) che

$$\delta x=u\mathrm{d}t,\ \delta y=v\mathrm{d}t,\ \delta z=w\mathrm{d}t.$$

Posto ciò le (6) diventano

$$X-\frac{1}{q}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)u+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)v+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)w$$

$$Y-\frac{1}{q}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)u+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)v+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)w$$

$$Z-\frac{1}{q}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)u+\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)v+\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)w$$

9. **Altra maniera più semplice di determinare la condizione di continuità, e l'equazione delle forze sollecitanti.** Si consideri il parallelepipedo già proposto nel principio della idraulica colle stesse quantità. In questo si consideri la faccia $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ più vicina al piano coordinato parallelo. In questo tutte le molecole si muovono colla velocità u parallelamente all'asse delle x, è perciò normalmente alla detta faccia. Queste molecole nel tempo $\mathrm{d}x$ descrivono spazi infinitesimi $u\mathrm{d}t$, che saranno tante lineole fluide $qu\mathrm{d}t$: dunque la massa di

fluido in tutta la faccia dydz sarà qudtdydz. Ora nella faccia parallela dydz la massa fluida sarà

$$\left[qu+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)dx\right]dtdydz:$$

dunque

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right)dtdxdydz$$

sarà la variazione della massa per la variazione della x, e perciò

$$\left(\frac{d.qv}{dy}\right)dtdxdydz\ ,\ \left(\frac{d.qw}{dz}\right)dtdxdydz$$

saranno le variazioni della massa per le variazioni della y, e della z: perciò

$$\left(\frac{d.qu}{dx}\right)dtdxdydz+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)dtdxdydz+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)dtdxdydz$$

sarà la variazione della massa di fluido per la variazione delle tre coordinate. Se a queste s'aggiungerà la

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)dtdxdydz$$

variazione della massa relativamente al tempo avremo la variazione completa della massa. Questa deve essere zero per la condizione di continuità del fluido: dunque questa condizione sarà espressa da

$$(1)\qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0.$$

Se il fluido è incompressibile è nulla la variazione del suo volume o della sua densità: dunque

$$(2)\qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{dq}{dx}\right)u+\left(\frac{dq}{dy}\right)v+\left(\frac{dq}{dz}\right)w=0.$$

Ora eseguite le differenziazioni nella (1) e tolta la (2) avremo

$$(3)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0:$$

quindi le (2), (3) sono le due equazioni (§ 4), che vengono dalla condizione di continuità pei fluidi incompressibili.

10. **Maniera semplice d'avere la formola della variazione del volume della molecola traslocata.** Ancorchè non si sapesse d'altronde (Idrod. § 20), la (3) ci da che

$$\left[\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)\right]dxdydzdt$$

è la formola della variazione del volume della molecola traslocata. Infatti dal raziocinio istituito (§ 9) per trovare la (1) si vede, che la massa della molecola in cui siano variate le quattro quantità x, y, z, t, o la massa della molecola traslocata è

$$(a)\left[q+\left(\frac{dq}{dt}\right)dt+\left(\frac{d.\,qu}{dx}\right)dt+\left(\frac{d.\,qv}{dy}\right)dt+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)dt\right]dxdydz$$

Se si dica $dxdydz+dV$ il volume di questa molecola la (a) sarà uguale a

$$(b)\left[q+\left(\frac{dq}{dt}\right)dt+\left(\frac{dq}{dx}\right)udt+\left(\frac{dq}{dy}\right)vdt+\left(\frac{dq}{dz}\right)wdt\right](dxdydz+dV)\cdot$$

Se nella (a) si facciano le differenziazioni e nell'uguaglianza colla (b) si tolgano le quantità comuni ai due membri, e gl'infinitesimi di secondo ordine della (b) avremo

$$\left[\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)\right]dxdydzdt=dV.$$

E si vede chiaro come con maggior facilità si è avuta questa variazione di volume (Idrod. § 19, 20). Troviamo ora l'equazioni delle forze sollecitanti

11. **Formole delle forze sollecitanti nel moto dei fluidi col principio di d'Alembert.** Il principio di questo geometra per ridurre la teoria del moto a quella dell'equilibrio è che *le forze applicate sono in equilibrio colle forze effettive volte in senso contrario.* Nella molecola che sempre abbiamo considerato le forze applicate sono le intrinseche

$$(1) \qquad X,\ Y,\ Z$$

e le pressioni

$$(2) \qquad \left(\frac{dp}{dx}\right)dx\,,\ \left(\frac{dp}{dy}\right)dy\,,\ \left(\frac{dp}{dz}\right)dz$$

e queste contrarie alla direzione delle prime che si sono supposte tendere ad aumentare le x. Le forze effettive sono dalla teoria della meccanica espresse dalle

$$(3) \qquad \frac{du}{dt}\,,\ \frac{dv}{dt}\,,\ \frac{dw}{dt}\,:$$

dunque vi deve essere equilibrio fra le prime forze (1), (2) e le forze

$$-\frac{du}{dt}\,,\ -\frac{dv}{dt}\,,\ -\frac{dw}{dt}\,:$$

ora la condizione dell'equilibrio dei fluidi è (Idrost. § 3) che i coefficienti differenziali parziali delle pressioni relativi alle coordine x, y, z siano uguali alle forze secondo queste coordinate colle quali le dette pressioni sono in equilibrio moltiplicate per la densità: dunque

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)= q\left(X-\frac{du}{dt}\right),\ \left(\frac{dp}{dy}\right)= q\left(Y-\frac{dv}{dt}\right),\ \left(\frac{dp}{dz}\right)= q\left(Z-\frac{dw}{dt}\right).$$

12. L'equazione poi d'equilibrio

$$dp = q(Xdx + Ydy + Zdz)$$

ci dà

$$\frac{1}{q}\,dp=\left(X-\frac{du}{dt}\right)dx+\left(Y-\frac{dv}{dt}\right)dy+\left(Z-\frac{dw}{dt}\right)dz$$

$$=Xdx+Ydy+Zdz-\frac{du}{dt}\,dx-\frac{dv}{dt}\,dy-\frac{dw}{dt}\,dz:$$

ma

$$\frac{dx}{dt}=u\,,\ \frac{dy}{dt}=v\,,\ \frac{dz}{dt}=w:$$

dunque

$$(1)\quad \frac{1}{q}\,dp=Xdx+Ydy+Zdz-udu-vdv-wdw.$$

13. **Si sono avute tutte l'equazioni per determinare le incognite del moto dei fluidi.** Nella teoria del moto dei fluidi si domandano come in ogni altro moto le velocità u, v, w, e di più si cerca il valore delle pressioni p e della densità q: dunque sono cinque le incognite. Ora se il fluido è incompressibile abbiamo cinque equazioni, cioè le tre (§ 7) delle forze sollecitanti e le due (§ 4) della continuità. Se il fluido incompressibile è omogeneo manca l'equazione (6. § 4), ma in tal caso la q costante è data.

Nel caso del fluido compressibile o elastico abbiamo quattro equazioni cioè le tre delle forze sollecitanti e la (4. § 3) della continuità: ma abbiano un'altra equazione $q=mp$, relazione fra la densità, e la pressione nei fluidi elastici.

CAPO II.

Moto dei fluidi incompressibili ed omogenei.

14. In questi fluidi si faccia la densità costante $q=1$ quindi avremo.

$$(a)\quad dp=Xdx+Ydy+Zdz-udu-vdv-wdw$$

questa equazione destinata a darci la pressione sembrerebbe subito integrabile, perchè nel caso della natura il trinomio

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$$

è differenziale esatto. Ma si avverta che il dp è il differenziale di p relativamente alle tre coordinate x, y, z, perchè proviene dalla equazione dell'equilibrio (§ 12), in cui non vi è differenziale di tempo: imperocchè per questa quantità si distingue il moto dalla quiete. Nel secondo membro però dell'antecedente equazione i differenziali di u, v, w, provenienti dalle formole generali del moto (3. § 11 : § 12) sono relativi alle quattro variabili x, y, z, t: onde se s'integrasse la detta equazione (a) s'integrerebbe più estesamente il secondo membro che il primo.

Quindi per l'integrazione, nel trinomio $udu+vdv+wdw$ si dovrà separare la parte che è il differenziale relativo alle coordinate, dal differenziale relativo al tempo, perchè nell'integrazione rispetto le coordinate questa parte rimarrà costante.

Ora si ritenga che nell'equazione (a) il d assoluto esprima la differenzazione relativa alle coordinate, ed allora facendovi la detta separazione diventerà

$$dp = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz - udu - vdv + wdw - u\left(\frac{du}{dt}\right)dt$$
$$- v\left(\frac{dv}{dt}\right)dt - w\left(\frac{dw}{dt}\right)dt .$$

Ma

$$udt = dx, \quad vdt = dy, \quad wdt = dz$$

dunque avremo

$$(1) \quad dp = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz - udu - vdv - wdw$$
$$- \left(\frac{du}{dt}\right)dx - \left(\frac{dv}{dt}\right)dy - \left(\frac{dw}{dt}\right)dz .$$

e l'altra della continuità

$$(2)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0.$$

15. **Condizione per l'integrazione delle equazioni del moto.** Si supponga il trinomio $udx+vdy+wdz$ integrabile, e che l'integrale sia K si avrà l'equazione

$$(3)\qquad udx+vdy+wdz=dK$$

Questa quantità K dovrà essere funzione delle coordinate e del tempo; delle coordinate perchè viene dall'integrazione di un differenziale relativo ad esse; del tempo perchè proviene dall'integrazione di un trinomio che contiene u, v, w che sono anche funzioni del tempo. Sarà però la K funzione determinata delle coordinate, perchè è quella che sorge dall'integrazione relativa a queste; sarà funzione arbitraria del tempo, perchè non abbiamo condizione a cui questa funzione debba soddisfare. Dalla equazione (3) viene che u, v, w saranno coefficienti differenziali parziali della K relativi ad x, y, z: dunque

$$(a)\qquad u=\left(\frac{dK}{dx}\right),\quad v=\left(\frac{dK}{dy}\right),\quad w=\left(\frac{dK}{dz}\right),$$

dunque l'equazione (2. § 14) diventa

$$(4)\qquad \left(\frac{d^2K}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2K}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2K}{dz^2}\right)=0.$$

Prendendo i coefficienti differenziali relativamente al tempo nell'equazioni (a) avremo

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{d^2K}{dxdt}\right),\ \left(\frac{dv}{dt}\right)=\left(\frac{d^2K}{dydt}\right),\ \left(\frac{dw}{dt}\right)=\left(\frac{d^2K}{dzdt}\right)$$

sostituendo questi valori nella (1. § 14) avremo

$$dp = Xdx + Ydy + Zdz - udu - vdv - wdw$$
$$-\left(\frac{d^2K}{dxdt}\right)dx - \left(\frac{d^2K}{dydt}\right)dy - \left(\frac{d^2K}{dzdt}\right)dz.$$

Il trinomio $Xdx+Ydy+Zdz$, trattandosi di forze della natura dirette a centri e funzioni delle distanze dal centro, è sempre integrabile, e questo integrale si dica V, allora la nostra equazione diventa

$$dp = dV - udu - vdv - wdw$$
$$-\left(\frac{d^2K}{dxdt}\right)dx - \left(\frac{d^2K}{dydt}\right)dy - \left(\frac{d^2K}{dzdt}\right)dz.$$

Il 2° trinomio negativo è evidentemente il differenziale di $\left(\frac{dK}{dt}\right)$ relativamente alle tre coordinate: dunque potrà esprimersi per $d.\left(\frac{dK}{dt}\right)$ essendosi fissato il d assolnto per differenziale relativo alle tre coordinate: con ciò avremo

$$dp = dV - udu - vdv - wdw - d.\left(\frac{dK}{dt}\right).$$

Dove l'integrale è tutto relativo alle coordinate, e d'immediata integrazione, quindi avremo

$$(5) \quad p = V - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \left(\frac{dK}{dt}\right).$$

Non accade di dovervi apporre la costante arbitraria, perchè la costante nel nostro caso deve essere funzione di t che si è supposto costante nell'integrazione, e la K è funzione arbitraria del tempo.

Posto tutto questo si vede chiaro il metodo da tenersi per avere coll'integrale le quattro incognite del nostro caso, cioè u, v, w, p. Si dovrà integrare l'equazione (4) d'onde si ricaverà il valore di K. Quando questo si abbia coll'equazioni (a) e (5) si troveranno le dette incognite.

Tutto ciò suppone che $udx+vdy+wdz$ sia un differenziale esatto: vediamo i casi in cui lo è. Ma prima dimostriamo che se quel trinomio in un dato tempo è differenziale esatto, lo è sempre.

Dall'equazione (1. § 14) ricaviamo

$$(6)\quad \left(\frac{du}{dt}\right)dx+\left(\frac{dv}{dt}\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dz$$

$$=Xdx+Ydy+Zdz-udu-vdv-wdw-dp$$

il secondo membro è un differenziale esatto, dunque lo è anche il primo. Supponiamo ora che nel trinomio

$$udx+vdy+wdz\,,$$

cioè in u, v, w il t diventi $t+dt$, ciò è lo stesso che scrivere lo stesso trinomio più il suo differenziale relativamente al tempo; dunque avremo

$$udx+vdy+wdz+\left(\frac{du}{dt}\right)dtdx+\left(\frac{dv}{dt}\right)dtdy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dtdz$$

ora di questi due trinomi il secondo è il primo membro dell'equazione(6) moltiplicato per dt,dunque come questo,così quello relativamente alle coordinate sarà un differenziale esatto; cioè $udx+vdy+wdz$, che nel tempo t per ipotesi è differenziale, esatto lo è anche nel tempo $t+dt$. Ora si potrebbe andare innanzi ad un altro tempo dt e così successivamente; perciò è vero che se quel trinomio è differenziale esatto in un tempo lo è sempre.

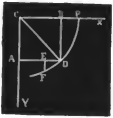
Dopo ciò se il fluido incomincia a muoversi dalla quiete, al principio abbiamo $u=0$, $v=0$, $w=0$, e perciò il trinomio $udx+vdy+wdz$ sarà un differenziale esatto ; e l' integrale sarà una costante, cioè funzione di tempo.

Se il fluido incominciasse a muoversi per una pressione uguale in tutti i punti, in questo caso u, v, w sarebbero

costanti e perciò quel trinomio sarebbe immediatamente integrabile.

Se anche la pressione non si distribuisce ugualmente in tutti i punti, nei diversi punti u, v, w sarebbero variabili; ma volgendo queste velocità in senso opposto, $-u$, $-v$, $-\omega$ formerebbero equilibrio. Ora nell'equilibrio le forze moltiplicate per i differenziali delle rette secondo cui agiscono, cioè nel caso nostro $-udx, -vdx, -wdx$ debbono dare un differenziale esatto (Idrost. § 20); dunque anche in questo caso il trinomio proposto al principio è un differenziale esatto.

Dall'antecedente ragionamento non ne discende, che se il trinomio $udx+vdy+wdz$ non è differenziale esatto non si possano coll' integrazione avere gli elementi del moto. Basta un solo caso per verificare la proposizione, e per questo sceglieremo il moto equabile d'una massa fluida intorno ad un asse. Sia questo l' asse delle z ed ω sia la velocità angolare.



Si consideri un punto che rotando in un tempo infinitesimo descriva l'arco DF. Se sia r il raggio DC, sarà $r\omega$ la velocità di rotazione intorno all'asse del punto D diretta secondo l'elemento DF. Si decomponga la volocità $r\omega$ secondo DF in due l'una secondo DE, e l'altra secondo EF, che sono i differenziali dx, dy delle coordinate $CB=x$, $BD=y$ del detto punto. Le dette componenti saranno $r\omega\cos FDE$, $r\omega\cos DFE$.

Ora $\cos FDE = -\frac{dx}{ds}$, $\cos DFE = \frac{dy}{ds}$. Inoltre i triangoli simili DFE, DBC ci danno $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{r}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{x}{r}$, dunque le componenti di $r\omega$ secondo gli assi delle x, e delle y sa-

ranno $-y\omega$, $x\omega$: perciò avremo $u=-y\omega$, $v=x\omega$, $w=0$. Dopo ciò il trimonio $udx+vdy+wdz$ sarà nel nostro caso $\omega(xdy-ydx)$, che non è certo differenziale esatto mancandogli il moltiplicatore $\frac{1}{x^2}$. Intanto sostituiti questi valori nell'equazione (*a.* § 14) avremo $p=V-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$.

16. **Ipotesi di moto per eseguire l'integrazioni delle formole generali del moto.** L'integrazione dell'equazione (4. § 15) presenta una difficoltà insormontabile quando si rimanga a differenze parziali per tre variabili; quindi per dare un saggio di trovare i valori delle quattro incognite supponiamo, che il moto si possa ridurre a due coordinate. Questo si avrà quando immaginiamo il fluido in moto diviso in tanti strati paralleli secondo il moto stesso e che le molecole che si trovano nei singoli strati durante il moto non li abbandonino. Allora supponendo gli assi delle x, y in uno di questi strati avremo la sola equazione

$$\left(\frac{d^2K}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2K}{dy^2}\right)=0\ ,$$

che imprendiamo ad integrare. Perchè questa integrazione serva ad altro caso interessante, che è quello delle corde vibranti, integreremo l'equazione

$$\left(\frac{d^2K}{dy^2}\right)=a^2\left(\frac{d^2K}{d^2x}\right),$$

che diverrà l'antecedente se $a^2=-1$.

17. **Integrazione dell'equazione a differenze parziali seconde di due variabili.** Si ponga

$$(a)\quad dK=pdx+qdy\ ,$$

p, q sono funzioni delle due variabili x, y; quindi

$$(b)\quad dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy\quad(c)$$

Dalla (*a*) abbiamo

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)=p\,,\left(\frac{dK}{dy}\right)=q\,,$$

e da queste

$$\left(\frac{d^2K}{dx^2}\right) = \left(\frac{dp}{dx}\right), \left(\frac{d^2K}{dy^2}\right) = \left(\frac{dq}{dy}\right).$$

Dalle due (*b*), (*c*) abbiamo

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = r, \left(\frac{dq}{dy}\right) = t,$$

dunque

$$\left(\frac{d^2K}{dx^2}\right) = r, \left(\frac{d^2K}{dy^2}\right) = t,$$

e sostituendo queste quantità nella

$$\left(\frac{d^2K}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2K}{dx^2}\right)$$

sarà $t = a^2 r$. Sostituito questo valore di t nella (*c*) avremo

$$dq = s dx + a^2 r dy.$$

Se sommiamo quest'equazione colla (*b*) moltiplicata per a, avremo

$$dq + a dp = s dx + a^2 r dy + a r dx + a s dy$$

$$= (s + ar) dx + a(s + ar) dy = (s + ar)(dx + a dy).$$

Il primo membro di quest'equazione è un differenziale esatto dunque lo deve essere anche il secondo, per lo che si richiede che $s+ar$ sia $F''(x+ay)$; dunque avremo

$$dq + a dp = F''(x + ay)(dx + a dy),$$

ed integrando

$$(d) \quad q + ap = F'(x + ay).$$

Ma a essendo radice di a^2 può essere anche $-a$; ammettendo dunque quest'ipotesi nell'equazione (*d*), ed avvertendo che per questo si muta la forma della funzione di $x+ay$, avremo $q - ap = f'(x - ay)$. Sommando questa e sottraendola dall'antecedente equazione avremo

$$q = \tfrac{1}{2} F'(x + ay) + \tfrac{1}{2} f'(x - ay),$$

$$p = \frac{1}{2a} F'(x+ay) - \frac{1}{2a} f'(x-ay).$$

Si sostituiscano questi valori di p e q nella (a), avremo

$$dK = \frac{dx}{2a} F'(x+ay) - \frac{dx}{2a} f'(x-ay) + \frac{dy}{2} F'(x+ay) + \frac{dy}{2} f'(x-ay) =$$

$$= F'(x+ay) \left(\frac{dx}{2a} + \frac{dy}{2}\right) - f'(x-ay) \left(\frac{dx}{2a} - \frac{dy}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2a} F'(x+ay)(dx+ady) - \frac{1}{2a} f'(x-ay)(dx-ady),$$

ed integrando

$$K = \frac{1}{2a} F(x+ay) - \frac{1}{2a} f(x-ay)$$

ossia per l'indeterminazione delle due funzioni avremo finalmente

$$K = F(x+ay) + f(x-ay)$$

e se si tratta della nostra equazione in cui $a = \sqrt{-1}$ avremo

$$\left(\frac{d^2K}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2K}{dy^2}\right) = 0,$$

e $$K = F(x+y\sqrt{-1}) + f(x-y\sqrt{-1}).$$

Trovato il K troveremo le velocità u, e v. Infatti

$$u = \left(\frac{dK}{dx}\right) = F'(x+y\sqrt{-1}) + f'(x-y\sqrt{-1})$$

$$v = \left(\frac{dK}{dy}\right) = [F'(x+y\sqrt{-1}) - f'(x-y\sqrt{-1})]\sqrt{-1}$$

$$\tfrac{1}{2}(u^2+v^2) = 2F'(x+y\sqrt{-1})f'(x-y\sqrt{-1})$$

sostituendo questi nella formola (5. § 15) avremo

$$p = V - 2F'(x+y\sqrt{-1})(f'(x-x\sqrt{-1}) - \left(\frac{dK}{dt}\right).$$

Potremo avere di più l'equazione differenziale delle curve che descrivono le molecole. Infatti abbiamo

$$u=\frac{dx}{dt}=F'(x+y\sqrt{-1})+f'(x-y\sqrt{-1})$$

$$(2)\quad v=\frac{dy}{dt}=[F'(x+y\sqrt{-1})-f'(x-y\sqrt{-1})]\sqrt{-1}$$

e dividendo la 2^a per la 1^a sarà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[F'(x+y\sqrt{-1})-f'(x-y\sqrt{-1})]\sqrt{-1}}{F'(x+y\sqrt{-1})+f'(x-y\sqrt{-1})}$$

che è l'equazione domandata. Manca di trovare le forme F ed f delle funzioni.

18. **Applicazione delle formole antecedenti ad un caso particolare.** Per non avere due incognite supponiamo, che il moto di cui trattiamo sia così regolare che le molecole che una volta cominciarono a percorrere l'asse delle x non lo abbandonino. In questo caso tali molecole non hanno velocità secondo l'asse delle y; quindi $y=0$, $v=0$. Se ammettiamo questa ipotesi nel valore di v (2.§17) troviamo $F'(x)=f'(x)$, dunque la forma della funzione F', è la stessa forma di f' e perciò anche la forma F della funzione, è la stessa che la forma f. Quindi nelle formole antecedenti alla F', sostituiremo f', e perciò l'equazione della traiettoria delle molecole sarà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[f'(x+y\sqrt{-1})-f'(x-y\sqrt{-1})]\sqrt{-1}}{f'(x+y\sqrt{-1})+f'(x-y\sqrt{-1})}.$$

Si moltiplichi l'equazione per $\sqrt{-1}$, e successivamente si aggiunga e si sottragga dall'unità, e si riduca allo stesso denominatore; avremo

$$\frac{dx+dy\sqrt{-1}}{dx}=\frac{2f'(x-y\sqrt{-1})}{f'(x+y\sqrt{-1})+f'(x-y\sqrt{-1})}$$

$$\frac{dx-dy\sqrt{-1}}{dx}=\frac{2f'(x+y\sqrt{-1})}{f'(x+y\sqrt{-1})+f'(x-y\sqrt{-1})},$$

e dividendo la 2^a per la 1^a avremo

$$(a)\quad \frac{dx-dy\sqrt{-1}}{dx+dy\sqrt{-1}}f'(x-y\sqrt{-1})-f'(x+y\sqrt{-1})=0.$$

Per determinare la forma f', si faccia $x+y\sqrt{-1}=s+\Delta s$, $x-y\sqrt{-1}=s$. Supponiamo poi che le pareti dentro le quali il fluido si muove in piani, o in veli siano due piani verticali, talchè l'intersezioni di questi veli colle dette pareti siano due rette, delle quali l'una la prenderemo per l'asse delle y. Se dall'intersezione delle dette due rette si computino le ascisse, potremo porre $y=ax$. Fatte queste sostituzioni nell'equazione antecedente (a), avremo

$$(b)\quad \frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}}f'(s)-f'(s+\Delta s)=0.$$

Avendo poi

$$x+ax\sqrt{-1}=s+\Delta s,\ x-ax\sqrt{-1}=s,$$

da esse avremo

$$\Delta s=2ax\sqrt{-1}:$$

ma dalla seconda

$$x=\frac{s}{1-a\sqrt{-1}};$$

dunque

$$\Delta s=\frac{2as\sqrt{-1}}{1-a\sqrt{-1}},\ \frac{\Delta s}{s}=\frac{2a\sqrt{-1}}{1-a\sqrt{-1}},$$

ed aggiungendo l'unità sarà

$$\frac{s+\Delta s}{s}=\frac{1+a\sqrt{-1}}{1-a\sqrt{-1}},$$

rovesciando

$$\frac{s}{s+\Delta s}=\frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}},$$

e prendendo i logaritmi neperiami, sarà

$$l.\ \frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}} = l.\ \frac{s}{s+\Delta s};$$

ma abbiamo

$$\Delta.\ l.\ \frac{1}{s} = l.\ \frac{1}{s+\Delta s} - l.\ \frac{1}{s} = l.\ \frac{s}{s+\Delta s},$$

dunque

$$l.\ \frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}} = \Delta.\ l.\ \frac{1}{s}.$$

Nella nota (*) si prende ad integrare un equazione a differenze finite che paragonata colla nostra superiore

$$\frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}}\ f'(s.) - f'(s+\Delta s) = 0,$$

ci dà

$$f'(s) = y,\ f'(s+\Delta s) = y',\ \mathrm{A} = \frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}},$$

$\mathrm{B}=1$, $\mathrm{X}=0$; dunque l'equazione finale in y della nota ,

---

(*) Sia proposta l'equazione a differenze finite $\mathrm{A}y - \mathrm{B}y' = \mathrm{X}$ per trovare la funzione y In quest'equazione y, A, B, X sono funzioni di x, e la y' è ciò che diventa y quando in essa si pone $x+\Delta x$ in luogo di x. Si faccia

$$y = e^{u}.\ t,$$

sarà

$$y' = e^{u+\Delta u}(t+\Delta t),$$

quindi l'equazione proposta diventerà

$$\mathrm{A}e^{u}t - \mathrm{B}e^{u+\Delta u}(t+\Delta t) = \mathrm{X},$$

ossia

$$e^{u}\left(\mathrm{A} - \mathrm{B}e^{\Delta u}\right) t - \mathrm{B}\ e^{u+\Delta u}\Delta t = \mathrm{X}.$$

Potendoci servire a piacere di una delle due variabili u , t , facciamo $\mathrm{A} - \mathrm{B}e^{\Delta u} = 0$, da questa abbiamo $\Delta u = l.\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, e $u = \Sigma l.\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$,

ci dà

$$f'(s)=Ce^{\Sigma l.\frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}}}$$

ma avevamo

$$l.\ \frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}}=\Delta.\ l.\ \frac{1}{s},$$

dunque

$$f'(s)=Ce^{l.\frac{1}{s}},$$

avvertendo che la somma colla differenza si distruggono.

---

quindi

$$e^{u+\Delta u}=e^{\Sigma l.\frac{A}{B}+l\frac{A}{B}}$$

ossia

$$e^{u+\Delta u}=e^{\Sigma l.\frac{A}{B}}e^{l.\frac{A}{B}}$$

ma $e^{l\frac{A}{B}}=\frac{A}{B}$, dunque

$$e^{u+\Delta u}=\frac{A}{B}e^{\Sigma l.\frac{A}{B}}.$$

Dall'ipotesi fatta dell'eguaglianza a zero, abbiamo $-Be^{u+\Delta u}\Delta t=X$,

e ponendovi il valore antecedente $e^{u+\Delta u}$, avremo

$$-Ae^{\Sigma l.\frac{A}{B}}\Delta t=X,\ \Delta t=-\frac{X}{A}e^{-\Sigma l.\frac{A}{B}},$$

e

$$t=C-\Sigma\frac{X}{A}e^{-\Sigma l.\frac{A}{B}},$$

quindi

$$y=e^{u}t=e^{\Sigma l.\frac{A}{B}}\left\{C-\Sigma\frac{X}{A}e^{-\Sigma l.\frac{A}{B}}\right\}.$$

Avvertendo ancora che $e^{l.\frac{1}{s}}=\frac{1}{s}$, avremo finalmente

$f'(s)=\frac{C}{s}$, ossia sostituendo invece di s, $x-y\sqrt{-1}$, ed avvertendo che la radice può essere positiva e negativa, otterremo

$$f'(x\pm y\sqrt{-1})=\frac{C}{x\pm y\sqrt{-1}}\,.$$

Ora avevamo

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)=f'(x+y\sqrt{-1})+f'(x-y\sqrt{-1}),$$

dunque

$$dK=\frac{Cdx}{x+y\sqrt{-1}}+\frac{Cdx}{x-y\sqrt{-1}}\,,$$

ed integrando

$$K=Cl.(x+y\sqrt{-1})+Cl.(x-y\sqrt{-1})=Cl.(x^2+y^2).$$

Avevamo ancora

$$u=f'(x+y\sqrt{-1})+f'(x-y\sqrt{-1}),$$

$$v=[f'(x+y\sqrt{-1})-f'(x-y\sqrt{-1})]\sqrt{-1}$$

dunque

$$u=\frac{C}{x+y\sqrt{-1}}+\frac{C}{x-y\sqrt{-1}}=\frac{2Cx}{x^2+y^2}=\frac{dx}{dt}$$

$$v=\left(\frac{C}{x+y\sqrt{-1}}-\frac{C}{x-y\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}=\frac{2Cy}{x^2+y^2}=\frac{dy}{dt}\,;$$

e dividendo la seconda per la prima sarà $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$,

$xdy-ydx=0$, ossia $\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$: ed integrando $\frac{y}{x}=C$.

Da ciò si ricava che le molecole nel moto descrivono linee rette. Avendo determinato la velocità del fluido si avrà la pressione dalla formola

$$p = V - 2f'(x+y\sqrt{-1})f'(x-y\sqrt{-1}) - \left(\frac{dK}{dt}\right),$$

che nel caso nostro è

$$p = V - \frac{2C^2}{x^2+y^2} - \left(\frac{dK}{dt}\right).$$

CAPO III.

Formole generali del moto dei fluidi ricavate dall'equazione generale dell'equilibrio dei sistemi qualunque basata sul principio delle velocità virtuali.

19. **Equazione delle forze sollecitanti.** Per servirci di questa equazione (Idrost. § 9) faremo uso del principio di d'Alembert (Idrocin. § 11). Si ritengano tutte le quantità, e loro simboli come nei paragrafi antecedenti dell'Idrocinamica. Egli è chiaro che le forze che sono in equilibrio sono (1) X, Y, Z e

$$(2) \qquad -\frac{du}{dt}, -\frac{dv}{dt}, -\frac{dw}{dt};$$

le prime (1) tendono ad aumentare le coordinate, e le altre (2) a diminuirle; quindi per li fluidi incompressibili nella formola (A) (Idrost. § 11) invece di X, Y, Z si dovranno porre rispettivamente

$$X + \frac{du}{dt}, Y + \frac{dv}{dt}, Z + \frac{dw}{dt}.$$

Si avverta però che il d che si trova in questi valori è la variazione pel moto reale del sistema, mentre il d

che si trova nella espressione (Idros. § 11)

$$\left[\left(\frac{d\delta x}{dx}\right)+\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)+\left(\frac{d\delta z}{dz}\right)\right]dxdydz$$

è relativo al passaggio da un punto ad un altro del sistema; quindi questo d si cambierà in D, onde la formola dell'equilibrio nel caso nostro sarà espressa da

$$S\left\{-q\left[\left(X+\frac{du}{dt}\right)\delta x+\left(Y+\frac{dv}{dt}\right)\delta y+\left(Z+\frac{dw}{dt}\right)\delta z\right]\right.$$
$$\left.+\lambda\left[\left(\frac{D\delta x}{Dx}\right)+\left(\frac{D\delta y}{Dy}\right)+\left(\frac{D\delta z}{Dz}\right)\right]\right\}DxDyDz=0$$

dalla quale avremo (Idrost. § 13)

$$\left(\frac{D\lambda}{Dx}\right)+q\left(X+\frac{du}{dt}\right)=0,\left(\frac{D\lambda}{Dy}\right)+q\left(Y+\frac{dv}{dt}\right)=0$$
$$\left(\frac{D\lambda}{Dz}\right)+q\left(Z+\frac{dw}{dt}\right)=0$$

queste daranno

$$(a)\quad D\lambda=q\left[\left(X+\frac{du}{dt}\right)Dx+\left(Y+\frac{dv}{dt}\right)Dy+\left(Z+\frac{dw}{dt}\right)Dz\right]$$

Se il fluido è compressibile o elastico otterremo la stessa formola (Idrost. § 19).

20. **Equazione della continuità del fluido**. Oltre la formola del moto nei fluidi si richiede quella che esprime la così detta continuità del fluido, cioè l'invariabilità della massa della molecola (Idroc. § 2). Questa è $d.qDxDyDz=0$, dove la D esprime la variazione passando da punto a punto del fluido, e la d passando da luogo a luogo dello spazio a causa del moto. L'equazione antecedente ci da

$$q'DxDyDz=c\,,$$

ove c è una costante. Prendendo in questa i logaritmi ne-

periani, e differenziando per d sarà

$$(1) \qquad \frac{dq}{q} + \frac{d.DxDyDz}{DxDyDz} = 0$$

ora (Idrod. § 22)

$$(2) \qquad d.DxDyDz = DxDyDz\left(\frac{Ddx}{Dx} + \frac{Ddy}{Dy} + \frac{Ddz}{Dz}\right).$$

Ove si è posto il d invece del δ perchè ambedue sono segni di variazione di moto. Sostituendo il valore (2) nella (1) sarà

$$(3) \qquad \frac{dq}{q} + \frac{Ddx}{Dx} + \frac{Ddy}{Dy} + \frac{Ddz}{Dz} = 0.$$

Inoltre abbiamo

$$dx = udt,\ dy = vdt,\ dz = wdt, \text{ e}$$

$$dq = \left(\frac{dq}{dt}\right)dt + \left(\frac{dq}{dx}\right)dx + \left(\frac{dq}{dy}\right)dy + \left(\frac{dq}{dz}\right)dz\ ;$$

ossia sostituendovi i valori antecedenti di dx, dy, dz sarà

$$dq = \left(\frac{dq}{dt}\right)dt + \left(\frac{dq}{dx}\right) udt + \left(\frac{dq}{dy}\right) vdt + \left(\frac{dq}{dz}\right)wdt$$

dunque sostituendo questo valore in (3) avremo

$$\left(\frac{dq}{qdt}\right)dt + \left(\frac{dq}{qdx}\right) udt + \left(\frac{dq}{qdy}\right) vdt + \left(\frac{dq}{qdz}\right)wdt$$

$$+ \left(\frac{Du}{Dx}\right)dt + \left(\frac{Dv}{Dy}\right)dt + \left(\frac{Dw}{Dz}\right)dt = 0,$$

ove si è tolto dalla differenziazione per D il dt, perchè questa quantità non può aver variazione da punto a punto del sistema, da cui è estranea. Ora è indifferente la natura della variazione nei coefficienti differenziali, talchè per esempio in vece di $\frac{Du}{Dx}$ si può porre $\frac{du}{dx}$: dunque se si

faccia questo cambiamento nell' equazione antecedente, si moltiplichi per q, e si divida per dt avremo

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{dq}{dx}\right)u+\left(\frac{dq}{dy}\right)v+\left(\frac{dq}{dz}\right)w$$
$$+\left(\frac{du}{dx}\right)q+\left(\frac{dv}{dy}\right)q+\left(\frac{dw}{dz}\right)q=0$$

ma

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)u+\left(\frac{du}{dx}\right)q=\left(\frac{d.qu}{dx}\right),$$

e così degli altri, quindi avremo per la continuità del fluido l'equazione

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0$$

come si è avuto in due altre maniere (Idroc. § 3, § 9).

21. **Condizione per l'integrabilità dell'equazione delle forze sollecitanti nei fluidi omogenei.** Supponiamo il fluido incompressibile ed omogeneo. In questo caso si può porre $q=1$, quindi avremo ((a) § 19), supponendo $Xdx+Ydy+Zdz=dV$, come si può porre nel caso della natura,

$$d\lambda-dV=\frac{du}{dt}\,Dx+\frac{dv}{dt}\,Dy+\frac{dw}{dt}\,Dz.$$

Prendendo i differenziali di u, v, w relativamente alle quattro variabili x, y, z, t, e ponendo invece dei dx, dy, dz, che ne risultano i loro valori udt, vdt, wdt avremo pel secondo membro

$$\left[\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)\right]dx$$
$$+\left[\left(\frac{dv}{dt}\right)+u\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dv}{dz}\right)\right]dy$$
$$+\left[\left(\frac{dw}{dt}\right)+u\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)\right]dz$$

nella quale espressione si è posto dx, dy, dz invece di Dx, Dy, Dz perchè è indifferente la natura del differenziale nei coefficienti differenziali

$$\left(\frac{du}{dt}\right),\ \left(\frac{du}{dx}\right),\ \left(\frac{dv}{dz}\right)\ldots$$

Se si prenda il differenziale di

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{2}$$

relativamente alle coordinate l'equazione antecedente evidentemente si trasforma in questa

$$\begin{aligned}d\lambda-dV= & \frac{d.(u^2+v^2+w^2)}{2}+\left(\frac{du}{dt}\right)dx+\left(\frac{dv}{dt}\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dz\\ (a)\ & +\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)\left(vdx-udy\right)+\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)\left(wdx-udz\right)\\ & +\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)\left(wdy-vdz\right).\end{aligned}$$

Affinchè questa equazione sia integrabile rispetto le coordinate si richiede solo che sia differenziale esatto relativamente a queste variabili il trinomio

$$\left(\frac{du}{dt}\right)dx+\left(\frac{dv}{dt}\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dz,$$

ossia, perchè la differenziazione relativamente al t non modifica questa condizione, affinchè l' equazione antecedente sia differenziale integrabile relativamente alle x, y, z si richiede che il trinomio $udx+vdy+wdz$ sia differenziale esatto relativamente alle stesse variabili. Infatti quando ciò avvenga debbono aver luogo l'equazioni

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx},\ \frac{du}{dz}=\frac{dw}{dx},\ \frac{dv}{dz}=\frac{dw}{dy}.$$

Or queste annullano i termini seguenti

$$\left(\frac{du}{dt}\right) dx + \left(\frac{dv}{dt}\right) dy + \left(\frac{dw}{dt}\right) dz$$

nell'equazione (a): dunque veramente l'integrabilità di questa equazione dipende dalla condizione che il trinomio $udx + vdy + wdz$ sia differenziale esatto: ciò combina coll'equazione (1) (Idroc. § 14), dove si vede che l'integrabilità di detta equazione dipende dall'integrabilità del trinomio

$$\left(\frac{du}{dt}\right) dx + \left(\frac{dv}{dt}\right) dy + \left(\frac{dw}{dt}\right) dz,$$

o del trinomio $udx + vdy + wdz$.

Si è detto che tanto è dire che il trinomio

$$\left(\frac{du}{dt}\right) dx + \left(\frac{dv}{dt}\right) dy + \left(\frac{dw}{dt}\right) dz$$

sia differenziale esatto rispetto alle coordinate quanto è dire che lo sia il trinomio $udx + vdy + wdz$. Infatti se questo lo è deve essere

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}.$$

Ora se hanno luogo queste equazioni, prendendo i coefficienti differenziali rispetto il t avremo

$$\left(\frac{d^2u}{dydt}\right) = \left(\frac{d^2v}{dxdt}\right),$$

(I)

$$\left(\frac{d^2u}{dzdt}\right) = \left(\frac{d^2w}{dxdt}\right), \quad \left(\frac{d^2v}{dzdt}\right) = \left(\frac{d^2w}{dydt}\right).$$

Ora queste sono le condizioni perchè il trinomio

$$\left(\frac{du}{dt}\right) dx + \left(\frac{dv}{dt}\right) dy + \left(\frac{dw}{dt}\right) dz$$

sia un differenziale esatto rispetto le coordinate : dunque se $udx + vdy + wdz$ è differenziale esatto rispetto le coordinate lo è pure il trinomio

$$\left(\frac{du}{dt}\right) dx + \left(\frac{dv}{dt}\right) dy + \left(\frac{dw}{dt}\right) dz.$$

Viceversa se questo lo è si dovranno verificare l' equazioni (1) : dunque integrando relativamente al t avremo

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right)\ ,\ \left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right)\ ,\ \left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right)\ ,$$

che sono le condizioni onde $udx + vdy + wdz$ sia differenziale esatto rispetto le coordinate.

22. **Caso esteso in cui si verifica la condizione dell'integrabilità dell'equazione delle forze sollecitanti.** Il trinomio $udx + vdy + wdz$ oltre i casi enunciati (Idroc. pag. 119) è differenziale esatto quando le velocità u, v, w sono assai piccole come nelle piccole ondulazioni. Infatti nell'equazione (a) trascurando i termini ove queste quantità piccolissime sono moltiplicate per dx, dy, dz avremo

$$d\lambda - dV = \left(\frac{du}{dt}\right) dx + \left(\frac{dv}{dt}\right) dy + \left(\frac{dw}{dt}\right) dz$$

in cui perchè il primo membro è un differenziale esatto relativamente alle coordinate lo deve essere anche il secondo.

CAPO IV.

Moto permanente dei fluidi pesanti.

23. Le formole generali del moto presentano una difficoltà insormontabile nella loro integrazione, quindi fa duopo ricorrere ad una ipotesi, che combinandosi quanto più si può coi casi usuali dia formole trattabili col calcolo in-

tegrale. Questa ipotesi è il così detto *moto permanente* dei fluidi pesanti.

24. **Definizione del moto permanente dei fluidi pesanti.** In un fluido pesante in moto si consideri una linea verticale ed un piano ad essa normale in un punto qualunque che faccia nel fluido una sezione: nel moto in proposito le molecole del fluido passano per questo piano tutte colla stessa velocità, e con direzione normale ad esso; la indicata linea si dirà *la direttrice.* Tutto il fluido poi in moto mantiene la stessa configurazione, o disposizione delle molecole. Da queste ipotesi si ricava subito una equazione che ci esprime la costante configurazione del fluido, o la costante disposizione delle di lui molecole, e che ci da la relazione fra le velocità e le sezioni del fluido nelle quali esse hanno luogo.

25. **Equazione fra le velocità e le sezioni.** Sia y una sezione ad un punto qualunque della direttrice, u la velocità delle molecole in questa sezione. Si dica f la sezione in un punto fisso della direttrice, e c la celerità delle molecole in questa. Per fissare le idee si supponga, che f venga dopo y, ossia che le velocità nella sezione y siano dirette verso la f. Poichè u, c sono spazii percorsi in una unità di tempo, essendo questa arbitraria, sia infinitesima; in tal caso u, c sono lineole rette infinitesime percorse dalle molecole, e nella nostra ipotesi saranno normali ai loro piani, cioè parallele agli elementi corrispondenti della direttrice, che pur sono normali ai detti piani. Ora la invariabile disposizione delle molecole del fluido in moto richiede,che questi spazi percorsi da esse siano riempiti di fluido; dunque u, c sono lineole fluide normali alle sezioni y, f, perciò ci daranno due strati di fluido, o due prismi di basi y, f e di altezze u, c: quindi questi prismi saranno yu, fc, che saranno due quantitativi di fluido che nello stesso tempo passano per le dette sezioni. Ora la costante disposizione delle

molecole richiede, che nello stesso tempo tanto fluido passi per f, quanto ne passa per y: perchè se più ne passasse per f il fluido fra le sezioni y, t si diraderebbe, e si condenserebbe nel caso contrario, e quindi non vi sarebbe l'invariabilità della configurazione del fluido: dunque $yu=fc$.

L'equazione $yu=fc$ tiene il luogo dell'equazione della continuità del fluido, che produceva (Idroc. § 15) l'equazione a differenze parziali di secondo ordine, nell'integrazione della quale consisteva tutta la difficoltà.

26. Se le densità nelle sezioni y, f fossero disuguali o q, q' si avrebbe $qyu=q'fc$.

27. **Determinazione della velocità nel moto permanente dei fluidi pesanti omogenei.** Nella formola generale (Idroc. § 12)

$$(1)\quad dp=q(Xdx+Ydy+Zdz-udu-vdv-wdw)$$

sarà

$$X=Y=0\,,\ Z=g\,,\ q=1$$

si dica u la velocità verticale della molecola fluida avremo

$$(a)\qquad gdp=gdz-udu,$$

che integrata ci darà

$$gp=gz-\tfrac{1}{2}u^2+C.$$

Vi si sostituisca $\frac{fc}{y}$ invece di u e sarà

$$(b)\qquad gp=gz-\tfrac{1}{2}\frac{f^2c^2}{y^2}+C.$$

Si dica m la sezione suprema del liquido, e supponendo che il piano delle xy sia in questa sezione, in questa sarà $z=0$. Sia poi A la pressione nella detta sezione. Si dica B la pressione alla sezione f distante di z dalla suprema. Si porti la (b) a questi due limiti, avremo pel limite superiore

$$A = -\tfrac{1}{2}\frac{f^2c^2}{m^2} + C,$$

e per l' inferiore $B = gz - \tfrac{1}{2}c^2$. Sottraendo questa dall'antecedente equazione avremo

$$A - B + gz = \tfrac{1}{2}c^2\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right)$$

$$(c) \qquad c = \sqrt{\frac{2(A-B) + 2gz}{\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right)}}\,.$$

Se questa equazione si moltiplica per $\frac{f}{y}$ avremo la celerità ad un'altra sezione qualunque y.

Nell'equazione (c) sono incognite A, B: ma se si suppone che la sezione f sia l'orifizio o la luce del recipiente dentro il quale si muove il liquido, le quantità A, B sono le pressioni dell'aria atmosferica, che potendosi supporre uguali nei comuni recipienti di non grande altezza, sparisce in (c) la loro differenza, e quindi avremo

$$c = \sqrt{\frac{2gz}{1 - \frac{f^2}{m^2}}}\,.$$

28. **Proposizione di Torricelli.** Se la luce sia assai piccola in confronto della sezione suprema sarà assai piccola la frazione $\frac{f}{m}$, e quindi assai minore la $\frac{f^2}{m^2}$, che potendosi trascurare in confronto dell'unità, avremo $c = \sqrt{2gz}$. Cioè il liquido esce dall'orifizio colla velocità dovuta all'altezza del livello sopra di esso. Si avverta che l'intrinseco del moto permanente è, che la velocità in ogni sezione è indipendente dal tempo; il perchè abbiamo potuto integrare l'equazione (a) (§ 27).

29. **Velocità nel moto permanente dei fluidi elastici.** In questi fluidi $q=kp$. Si sostituisca questo valore in ((1) Idroc. § 27) ed avremo

$$\frac{gdp}{p}=kgdz-kudu.$$

Se p' sia la pressione nella sezione f, l'equazione $qyu=q'fc$ ci da $u=\frac{p'fc}{py}$: integrando dunque l'equazione antecedente e sostituendovi questo valore di u sarà

$$glp=kgz-\frac{k}{2}\,\frac{p'^2f^2c^2}{p^2y^2}+C$$

e portando l'integrale ai limiti del livello e della luce nei quali $y=m$, $y=f$; $z=0$, $z=a$; $p=A$, $p'=B$, avremo

$$c=\sqrt{\frac{2gka+2gl\,\frac{A}{B}}{k\left(1-\frac{B^2}{A^2}\,\frac{f^2}{m^2}\right)}}$$

Se f sia l'orifizio le quantità A, B sono le pressioni atmosferiche, che nei comuni recipienti sono uguali, onde $l\,\frac{A}{B}=0$; quindi

$$c=\sqrt{\frac{2gz}{1-\frac{f^2}{m^2}}}$$

30. **Formola della pressione nei fluidi omogenei pesanti.** Riguardo alla pressione abbiamo ((b) § 26)

$$gp=gz-\tfrac{1}{2}\,\frac{f^2c^2}{y^2}+C.$$

Per determinare la costante portiamo l' equazione al li-

vello dove $gp = A$, cioè è uguale alla pressione dell' aria atmosferica, la z è zero, la $y=m$ quindi

$$A = -\frac{1}{2}\frac{f^2c^2}{m^2} + C:$$

sottraendo questa dall'antecedente equazione avremo

$$p = A + z - f^2\frac{c^2}{2g}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Da questa si ricava che la pressione è costante per tutta la sezione y. Se la luce è molto piccola relativamente alla sezione suprema si trascurerà il termine $\frac{f^2}{m}$, ed avremo

$$p = A + z - \frac{f^2}{y^2} \cdot \frac{c^2}{2g}$$

se si faccia $\frac{c^2}{2g} = a$ sarà a l' altezza dovuta alla velocità della luce, ed $\frac{f^2}{y^2}\,a$ sarà l'altezza dovuta alla celerità nella sezione y: quindi la formola $p = A + z - \frac{f^2}{y^2}.a$ dice, che la pressione in una sezione qualunque è la pressione atmosferica, più la differenza dell' altezza del livello sulla sezione, e l'altezza dovuta alla celerità nella sezione stessa: la prima si può dire *altezza idrostatica*, l'altra *altezza idrocinamica*.

Se poi la luce fosse molto piccola eziandio rispetto qualunque sezione, si può anche trascurare il termine $\frac{f^2}{y^2} \cdot \frac{c^2}{2g}$ e quindi $p = A + z$: cioè le pressioni nelle diverse sezioni sono come se il fluido fosse in quiete.

CAPO V.

Del moto lineare dei fluidi omogenei pesanti.

31. Riflettendo sul moto permanente dei fluidi che abbiamo trattato si vede, che questo consiste nel moto delle molecole secondo nna direttrice , cioè un moto tale che le molecole passino per le diverse sezioni normali a questa linea, con velocità di direzioni normali alle dette sezioni , e che in ogni sezione la velocità in tutti i punti sia la stessa, e costante in tntta la durata del moto: quindi in questa ipotesi le velocità essendo indipendenti dal tempo si è potuto fare l'integrazione della formola (Idroc.§12) come si presentava, supponendo che i differenziali nel trinomio $udu + vdv + wdw$ fossero differenziali riguardo alle coordinate, come riguardo a queste erano i differenziali in dp, e nel trinomio $Xdx + Ydy + Zdz$. Abbiamo poi ricavato che la pressione in tutti punti della stessa sezione è la stessa, e che non varia al variar del tempo da cui si è trovata indipendente.

32. **Caso in cui ha luogo il moto permanente.** Questo moto permanente ha lnogo nella discesa dei fluidi pesanti omogenei come l'acqua nei recipienti prismatici verticali, dai quali il fluido esce per nn foro, e si mantiene tale sino ad una certa distanza da questo. Ciò si ricava dalla esperienza, e con piccola riflessione si vede ragionevole.

Infatti in cotal moto verticale le molecole si muovono parallelamente alla direttrice, linea retta verticale, e per qualunque sezione orizzontale passano con la stessa velocità per tutta la sezione , e costante nella durata del moto, e la pressione è costante in tutti i punti della sezione ed a qualunque tempo.

Per vedere in quali altri casi avvenga cotal moto ricaveremo dalle equazioni generali del moto quella del moto verticale di un fluido omogeneo pesante ritenendo che in ciascuna sezione per tutti i punti la velocità sia la stessa, e che possa variare durante il moto cioè che sia variabile e per la posizione della sezione, e pel tempo. Chiameremo *moto lineare* questo moto : quindi moto lineare è quello in cui il fluido mantenendo la stessa disposizione di molecole esce delle sezioni normali alla direttrice con direzioni parallele a questa, e con velocità costante per ogni sezione ma variabile col tempo.

33. **Riflessione sulla formola che esprime l'invariabile disposizione delle molecole nel moto lineare.** In tal caso nella equazione $yu=fc$, la f sarà costante ; la c sarà funzione del tempo perchè velocità in un determinato luogo ; la y dipenderà dal luogo e perciò sarà funzione di una ascissa presa sulla direttrice ; e la u finalmente sarà funzione di questa ascissa e del tempo.

34. **Formola del moto verticale dei fluidi omogenei pesanti.** Ricorrendo ora alle equazioni (Idroc.§14) abbiamo nel nostro caso $X=Y=0$, $Z=g$, e supponendo il liquido omogeneo si porrà $q=1$. Non avendo luogo che le velocità verticali sarà $u=v=0$. Quindi spariscono le due prime equazioni, e ponendo nella terza u invece di w, colle dette sostituzioni avremo

$$\frac{gdp}{dz}=g-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dz}\,.$$

Dall' equazione $u=\dfrac{fc}{y}$ prendendo il coefficiente differenziale prima rispetto il tempo poi rispetto la z coll'avvertire che y è funzione di z, e c è funzione di t avremo

$$\frac{du}{dt}=\frac{fdc}{ydt}\,,\;\frac{du}{dz}=-\frac{fcdy}{y^2dz}\,;$$

quindi

$$gdp=gdz-\frac{fdc}{dt}\frac{dz}{y}+f^2c^2\frac{dy}{y^3}$$

ed integrando rispetto la z sarà

$$(1)\quad p=C+z-\frac{fdc}{gdt}\int\frac{dz}{y}-\frac{f^2}{y^2}\cdot\frac{c^2}{2g}.$$

Se si suppone in questa che la celerità delle sezioni non dipenda dal tempo sparirà il termine

$$\frac{fdc}{gdt}\int\frac{dz}{y}$$

in cui $dc=0$, e si avrà per c il valore trovato (Idroc. § 27).

35. **Moto secondo una direttrice qualunque.** Si supponga ora che il fluido animato dalla sola gravità si muova secondo una direttrice qualunque. Si cali una verticale da un punto di questa direttrice, e su di questa si prenda un'ascissa l, dall'estremità della quale condotta una orizzontale limiti una ascissa z nella verticale. Al punto di ascissa l s'intenda fatta nel fluido una sezione y normale alla direttrice, ed all'ascissa $l+dl$ sia fatta un'altra sezione parallela alla prima. Queste due sezioni racchiuderanno una falda fluida, che si potrà considerare come un prisma di base y e di altezza dl. Se sia uno la densità del fluido e g la gravità, l'espressione $gydl$ sarà il peso di questa falda. Sia φ l'angolo che la dl fa colla dz: in tal caso $gydl\cos\varphi$ sarà la componente del peso della falda secondo la dl, cioè secondo la direzione della velocità delle molecole che passano per la sezione y. Si supponga costante la pressione su tutta la sezione y, e si dica gp. Questa sezione sarà spinta secondo il moto del fluido dalla pressione gpy, e in senso opposto al moto nella sezione infinitamente prossima, la falda fluida sarà spinta dalla pressione $(p+dp)gy$: dunque totalmente la falda sarà spinta in di-

rezione contraria al moto dalla pressione $gydp$: ma secondo il moto era spinta dalla forza $gydl\cos\varphi$ dunque secondo il moto sarà spinta dalla forza $gydl\cos\varphi - gydp$. Se questo quantitativo di forza si dividerà per ydl massa della falda l'espressione

$$\frac{gydl\cos\varphi - gydp}{ydl}$$

sarà la forza di una unità di massa, e questa dalla meccanica è espressa da $\frac{du}{dt}$: dunque

$$\frac{du}{dt} = \frac{gydl\cos\varphi - gydp}{ydl}$$

ossia $du.\frac{dl}{dt} = gdl\cos\varphi - gdp$. Ora $\frac{dl}{dt}$, cioè differenziale dello spazio diviso pel differenziale del tempo, è la velocità u, e $dl\cos\varphi$ è dz, perchè dl è ipotenusa, dz è cateto, e sono due linee che fanno l'angolo φ: dunque avremo $gdp = gdz - udu (a)$.

36. **Riflessione sulla equazione avuta.** Questa equazione sembra integrabile; ma si avverta che il differenziale di p dipende dall'ascissa l, o z. Infatti è provenuta dal passare dalla sezione in l alla sezione in $l + dl$: il differenziale però in du, proveniente dalla teoria generale del moto, e perciò differenziale in tutta la sua estensione cioè relativamente alla l, o z, ed al tempo. Se dunque s'integrasse l'equazione come si presenta integrabile (§ 35) s'integrerebbe più estesamente il secondo membro che il primo: quindi è duopo prima di fare l'integrazione di separare in du il differenziale relativo alla z dal differenziale relativo alla t, perchè integrandosi il dp, ed il dz dell'equazione, s'integrerà quella prima parte supponendo costante la seconda.

37. **Modificazione sull'equazione.** Per questa separazione è opportuna l'equazione $u = \frac{fc}{y}$, dove la c, e le

y sono funzioni separate l'una del t, l'altra delle z. Differenziando dunque e sostituendo in (a. § 35) avremo

$$gdp - gdz - \frac{f^2 cdc}{y^2} + \frac{f^2 c^2 dy}{y^3} :$$

ossia perchè

$$\frac{fc}{y} = u = \frac{dl}{dt}$$

sarà

$$gdp = gdz - \frac{fdc}{dt} \cdot \frac{dl}{y} + \frac{f^2 c^2 dy}{y^3} .$$

In questa equazione la frazione $\frac{dc}{dt}$ è la sola che contiene la differenziazione relativa al tempo: quindi integrando rispetto l'ascissa z avremo

$$p = C + z - \frac{fdc}{gdt} \int \frac{dl}{y} - \frac{f^2}{y^2} \cdot \frac{c^2}{2g} ,$$

38. **Confronto dei moti secondo una direttrice verticale, ed obliqua.** Se si confronta questa equazione colla (1. § 34) relativa al moto verticale del fluido si vede, che differisce solo in questo, che in quella il differenziale sotto l'integrale è relativo alla direttrice verticale, e qui si riferisce alla direttrice obliqua. Quindi se l'obliquità sia di poco, o la f assai piccola, o la y assai ampia il moto secondo questa direttrice è prossimamente lo stesso che il verticale. Le due equazioni poi s'identificano primo se il moto si fa permanente come accade nel corso regolare delle acque dentro gli alvei, in secondo luogo quando la luce f sia piccolissima. Imperocchè nel primo caso $dc = 0$ e nel secondo si può trascurare il termine

$$\frac{fdc}{gdt} \int \frac{dl}{y} .$$

39. Nel moto lineare del fluido, e da ora in poi diremo dell'acqua, in un recipiente si possono distinguere tre casi. Il

primo quando la sezione suprema ed infima siano fisse, e questo è il così detto *moto in un vaso inesausto*. Il secondo quando la sezione inferiore sia fissa, e la superiore sia variabile abbassandosi , e questo è *il moto nei vasi che per l'efflusso si vuotano*. Il terzo quando siano variabili ambedue le sezioni, e questo è il caso *di una determinata massa d'acqua che va scorrendo lungo un canale*. Mancherebbe il caso che la sezione suprema fosse fissa , e l' inferiore variabile, ma questo non può aver luogo, perchè quando fosse riempito il recipiente, si avrebbe il primo caso del vaso inesausto. Tratteremo di questi tre casi.

CAPO VI.

Del moto lineare dell'acqua nei vasi inesausti.

40. In questo caso portando l' equazione (§ 37) ai limiti, nei quali sia al limite superiore

$$z=k,\ y=m,\ \int\frac{dl}{y}=M,\ p=A$$

al limite inferiore

$$z=h,\ y=n,\ \int\frac{dl}{y}=N,\ p=B$$

avremo

$$(a)\qquad A-B+k-h=\frac{f dc}{g dt}\left(N-M\right)+\frac{c^2}{2g}\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right).$$

Per integrarla si supponga A— B=0, perchè le pressioni atmosferiche nelle due sezioni estreme nei recipienti o alvei comuni sono uguali. Si faccia $k-h=a$, che sarà l'altezza della quantità d'acqua fra le due sezioni, e si ponga S in luogo di N — M cioè l' integrale definito di $\frac{dl}{y}$, allora l'equazione antecedente diverrà

$$(b)\qquad a=\frac{f S dc}{g dt}+\frac{c^2}{2g}\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right).$$

Si ponga $1-\frac{f^2}{m^2}=n$ avremo $dt=\frac{2fSdc}{2ag-nc^2}$. Per integrare il secondo membro si spezzi la frazione

$$\frac{1}{2ag-nc^2}.$$

Considerando il denominatore come la differenza di due quadrati si potrà porre

$$\frac{1}{2ag-nc^2}=\frac{1}{(\sqrt{2ag}-c\sqrt{n})(\sqrt{2ag}+c\sqrt{n})}.$$

Fatto lo spezzamento come nella nota (*) avremo

$$\frac{1}{2ag-nc^2}=\frac{1}{2\sqrt{2ag}}\left(\frac{1}{\sqrt{2ag}-c\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2ag}+c\sqrt{n}}\right)$$

dunque

$$t=2fS\int\frac{dc}{2ag-nc^2}$$

$$=\frac{fS}{\sqrt{2ag}}\left(\int\frac{dc}{\sqrt{2ag}-c\sqrt{n}}+\int\frac{dc}{\sqrt{2ag}+c\sqrt{n}}\right)$$

(*) Sia una frazione $\frac{fx}{Fx}$, di cui il denominatore contenga almeno un fattore di primo grado in x. Sia questo fattore $ax+b$, onde $Fx=(ax+b)F'x$. Si faccia $ax+b=0$ ed il valore risultante $x=-\frac{b}{a}$ si sostituisca nella frazione $\frac{fx}{F'x}$, e ciò che ne risulta sia A: allora $\frac{fx}{F'x}-A$ è una funzione tale di x che pel valore risultante da $ax+b=0$ diventa zero: dunque questa funzione è divisibile esattamente per $ax+b$, ossia è divisibile per $ax+b$ la funzione

$$\frac{fx-AF'x}{F'x}:$$

$$\frac{f2}{\sqrt{2ag}}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{L}\left(\sqrt{2ag}+c\sqrt{n}\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{L}\left(\sqrt{2ag}-c\sqrt{n}\right)\right]$$

$$=\frac{fS}{\sqrt{2agn}}\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2ag}+c\sqrt{n}}{\sqrt{2ag}-c\sqrt{n}}\,.$$

Non accade di porvi costante, perchè ponendo $t=0$, $c=0$ tutto svanisce nella nostra equazione. Passando dai logaritmi ai numeri per trovare il valore di c otterremo

$$(c) \qquad c=\sqrt{\frac{2ag}{n}}\cdot\frac{e^{ht}-1}{e^{ht}+1}$$

dove

$$h=\frac{\sqrt{2agn}}{fS}\,.$$

---

ma la divisibilità d'una frazione è nel numeratore: dunque $fx-\mathrm{A}F'x$ è divisibile esattamente per $ax+b$: si ponga dunque

$$\frac{fx-\mathrm{A}F'x}{ax+b}=\varphi x$$

avremo $fx=\mathrm{A}F'x+(ax+b)\varphi x$: e dividendo questa per l'equazione $Fx=(ax+b)F'x$ avremo

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{\mathrm{A}}{ax+b}+\frac{\varphi x}{F'x}\,.$$

Da ciò si ricava che *per ogni fattore semplice* ax+b *del denominatore si ottiene una frazione* $\frac{\mathrm{A}}{ax+b}$ *di cui il numeratore è costante, ed il denominatore è il detto fattore, più inoltre una frazione* φx *divisa per l'altro fattore* F'x *del denominatore della frazione proposta.* Il numeratore A si determina *facendo una frazione* $\frac{fx}{F'x}$ *il di cui numeratore è quello della frazione proposta, ed il denominatore, è pur quello della proposta toltovi il fattore in proposito* ax+b. *Fatto poi*

41. **Conseguenze della formola della velocità.** Se si supponga il t piccolissimo sviluppato e^{ht} nel numeratore e denominatore di (c) otterremo la frazione

$$\frac{ht + \frac{h^2t^2}{2} + \dots}{2 + ht + \dots},$$

la quale, trascurate nel numeratore le potenze di t superiori alla prima e nel denominatore la serie dopo il 2 perchè piccolissima, diventerà $\frac{ht}{2}$ ossia $\frac{t\sqrt{2agn}}{2fS}$,

---

zero questo fattore il valore risultante di x *si sostituirà nella detta frazione* $\frac{fx}{f'x}$ *e questo sarà il valore di* A.

Nel caso nostro avremo

$$\frac{1}{(\sqrt{2ag} - c\sqrt{n})(\sqrt{2ag} + c\sqrt{n})} = \frac{A}{\sqrt{2ag} - c\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt{2ag} + c\sqrt{n}}.$$

Per trovare A si farà la frazione $\frac{1}{\sqrt{2ag} + c\sqrt{n}}$, poi fatto $\sqrt{2ag} - c\sqrt{n} = 0$ il valore risultante $c = \sqrt{\frac{2ag}{n}}$ si sostituirà nella frazione antecedente ed il valore che se ne otterrà cioè $\frac{1}{2\sqrt{2ag}}$ sarà il valore di A. Per B si farà la frazione $\frac{1}{\sqrt{2ag} - c\sqrt{n}}$, poi $\sqrt{2ag} + c\sqrt{n} = 0$, d'onde $c = -\sqrt{\frac{2ag}{n}}$, che sostituito nella frazione antecedente ci darà $B = \frac{1}{2\sqrt{2ag}}$.

dunque $c = \frac{agt}{fS}$, perciò il moto sarà uniformemente accelerato. Lo stesso si ottiene dall'equazione $dt = \frac{2fSdc}{2ag - nc^2}$ (§ 40) se vi si trascura la c^2 come quantità piccolissima.

Si supponga ora t grandissima sarà assai più grande e^{ht}: trascurando dunque l'unità nel numeratore, e nel denominatore della frazione in (c) avremo

$$c = \sqrt{\frac{2ag}{n}}, \text{ o } \frac{c^2}{2g} = \frac{a}{n} = \frac{a}{1 - \frac{f^2}{m^2}}$$

cioè il moto sarà permanente perchè di velocità costante. Se la luce sia piccolissima in confronto della sezione suprema si potrà trascurare la frazione $\frac{f^2}{m^2}$ e sarà $\frac{c^2}{2g} = a$, cioè *l'altezza dovuta alla celerità dell'efflusso dalla luce piccolissima è l'altezza del livello sull'orifizio.* Ciò, come costa dalla esperienza, si può ritenere fino dal principio del moto.

Lo stesso risultamento si ha dall'equazione (b.§ 40) se si suppone c costante o $dc = 0$.

42. **Caso di apparente indeterminazione nella formola delle celerità.** Se nella equazione (c. § 40) si suppone $f = m$, o il recipiente senza fondo, avremo $n = 0$, e perciò, $h = 0$, quindi sarà $c = \frac{0}{0}$, simbolo d' indeterminazione. Per iscoprire il valore di c, secondo il metodo del calcolo differenziale, si deve fare la differenziazione nell'equazione (c): ma già abbiamo la sua equazione differenziale (b). In questa si ammetta l'ipotesi di $f = m$ ed avremo $dc = \frac{agdt}{fS}$, o $c = \frac{agt}{fS}$ cioè il moto uniformemente accelerato.

Lo stesso valore si ottiene svolgendo in serie l'esponenziale e^{ht} nel valore di (c. § 40). Infatti avremo.

$$c=\sqrt{\frac{2ag}{n}}\cdot\frac{e^{ht}-1}{e^{ht}+1}=\sqrt{\frac{2ag}{n}}\,\frac{ht+\frac{h^2t^2}{2}+\ldots}{2+ht+\ldots}$$

$$=\sqrt{\frac{2ag}{n}}\,\frac{h(t+\frac{ht^2}{2}+\cdots)}{2+ht+\ldots}=\sqrt{\frac{2ag}{n}}\cdot\frac{\sqrt{2agn}}{fS}\,\frac{t+\frac{ht^2}{2}+\ldots}{2+ht+\ldots}$$

Togliendo n dal numeratore e dal denominatore e poi facendo $n=0$, ossia $h=0$ ritroveremo la fòrmola (§ 42) pel valore della celerità.

Se il vaso è prismatico e verticale cioè di sezione costante m, e di altezza a sarà $\int\frac{dl}{y}=S=\frac{a}{m}$: in tal caso l'equazione $c=\frac{agt}{fS}$, ponendovi per S il valore trovato ed m invece di f, diventerà $c=gt$, cioè il fluido scende dentro il vaso con moto uniformemente accelerato libero: ciò che è evidente nel caso che si considera.

Se nel valore

$$\frac{c^2}{2g}=\frac{a}{1-\frac{f^2}{m^2}}$$

del moto permanente si ammette l'ipotesi antecedente di $f=m$ avremo $\frac{c^2}{2g}=\frac{a}{0}$ simbolo di assurdità. Ed infatti da una formola di moto equabile non si può avere formola di moto uniformemente accelerato.

Se nella formola (a § 40) si fa il caso del moto permanente, e si suppone la luce piccolissima si potrà trascurare la frazione $\frac{f^2}{m^2}$ e così avremo $\frac{c^2}{2g}=a$, cioè la celerità permanente colla quale l'acqua esce da un recipiente qualunque per una luce piccola è dovuta ad una altezza, che

è la distanza della luce dal livello. Da ciò discende, che le velocità per due piccoli fori posti a diverse distanze dal livello sono fra loro come le radici di queste distanze. Inoltre i getti verticali all' insù ritornano al piano di livello, ed i getti obliqui descrivono parabole, che dovendo avere per parametro quattro volte l'altezza dovuta alla celerità del getto, avranno un parametro che sarà quattro volte la distanza della luce dal livello. Si prescinde in ciò dalla resistenza dell'aria, e da altro ostacolo. L'esperienza ci fa conoscere che più si approssimano al livello i getti quasi verticali, che i verticali, perchè in questi l' acqua saliente risente la pressione dell' acqua che cade. Riesce anche meglio nei getti di poca altezza, nei quali per la velocità minore e pel tragitto più piccolo l' acqua risente meno la resistenza dell'aria.

Se in un getto obliquo si misura una ascissa e l'ordinata corrispondente, il quadrato di questa diviso per quella ci dà prossimamente il quadruplo della distanza della luce dal livello.

43. **Formola della portata.** Per *portata d' una luce s' intende la quantità d' acqua che ne esce in un dato tempo.* Sia f la luce, c la celerità permanente in essa, t il tempo, e Q la quantità di acqua che esce in questo tempo. La c sarà la linea che percorre una molecola in una unità di tempo: dunque nel tempo t percorrerà la linea ct: ora per la continuità del fluido questa è una linea fluida che da un punto della f uscirà nel tempo t: dunque da tutta la luce uscirà la quantità d'acqua cft: quindi $Q=cft$, e ponendovi il valore di c avremo $Q=ft\sqrt{2ga}$ che è la formola della portata. Questa serve ancora per determinare una delle quattro quantità Q, f, t, a quando se ne conoscano tre. Se per esempio si volesse da un getto conoscere l'elevazione del livello sopra la luce basterebbe raccogliere

l'acqua che esce dalla nota ampiezza di luce f in un tempo cognito t, chè dalla equazione antecedente si avrebbe la quantità cercata a.

44. **Contrazione della vena.** Dalla equazione antecedente si può riconoscere se veramente l'acqua esce dalla intera luce, ossia se la sezione dell'acqua alla luce sia uguale all'ampiezza della luce stessa. Basta infatti porre l'equazione sotto la forma $q = ift\sqrt{2ga}$ poi sostituirvi la quantità d'acqua Q che esce da una data luce f in un tempo dato t, sostituirvi eziandio il valore di questa luce, del tempo, e della elevazione a del livello sopra la luce, poichè il valore di i che risulterà risolverà la questione. Il più piccolo valore che si è trovato per i è 0.597, il più grande è 0.620, il medio è 0.6. Si adotta però più comunemente per i la frazione $\frac{5}{8}$, che per prima cifra decimale ci da l'antecedente valore 0.6.

45. **Maniera con cui avviene di fatto la contrazione della vena.** Consultando l'esperienza si vede come avvenga questa contrazione della vena, e quando abbia luogo il moto lineare. Infatti nei vasi prismatici verticali di stretta luce vi si gettino dei minuzzoli poco più pesanti dell'acqua; questi si veggono tutti discendere verticalmente fino alla distanza dal foro di circa tre raggi del foro, dopo il qual luogo vanno movendosi tutto intorno descrivendo linee convesse verso l'interno da indicare una conoide tutta mobile coll'acqua stagnante all'intorno. A questa conoide si dà il nome di *gorgo*. La sua base superiore è la sezione del prisma, l'inferiore è la luce, e l'altezza tre raggi di questa. La detta conoide si vede meglio se alla superficie dell'acqua si versi uno strato d'olio, o d'altro liquido colorato più leggero dell'acqua; imperocchè questi liquidi giunti alla distanza dal foro di tre suoi raggi si fanno a tra-

verso del fluido a formare visibilmente la detta conoide mobile.

La restrizione poi di questo fluido mobile non termina alla luce, ma prosiegue fino alla distanza da essa di circa un suo raggio, dove ha il massimo ristringimento. Questa porzione della conoide fuori della luce si dice *vena contratta*, e la sezione nell'ultimo ristringimento si dice *sezione della vena contratta*, e questa è $\frac{5}{8}$, o 0.6 della luce, che si disse doversi prendere in pratica per la luce stessa. Il sito, e l'ampiezza della contrazione della vena rimane sensibilmente la stessa comunqne varii o la direzione del getto o l'altezza del recipiente, o l'ampiezza della Iuce, sempre però che qnesta sia molto piccola relativamente alla sezione del vaso, e sia scolpita in lastra sottile, perchè se fosse un foro in parete di grossezza sensibile, questo si potrebbe considerare come nn piccolo tubo adattato alla luce, e vedremo in seguito come questa aggiunta modifica la velocità dell'acqua che ne esce.

CAPO VII.

Si valuta l'effetto dell'afflusso dell'acqua in un recipiente.

46. **Formola della pressione prodotta dall' afflusso.** Abbiamo esaminato il caso dell'uscita dell' acqua da un vaso inesausto. Ciò generalmente parlando non può aver luogo se non per l'afflusso di nuova acqua che entra nel vaso a mantenere invariabile la posizione del livello. Or questo afflusso produce un' azione sull'acqua che incontra a causa della differenza delle loro velocità. Questa azione è una pressione, e quindi è una retta d'altezza che si deve aggiungere al primo membro dell'equazione (*a*.§ 40) che contiene rette rappresentanti pressioni.

Si è detta m la superficie di livello, e si è trovato che $\frac{fc}{m}$ è la velocità di questa superficie. Si dica k la ragione tra la velocità dell'acqua affluente, e la velocità di m, esprimerà $\frac{kfc}{m}$ la velocità dell'acqua affluente. L'azion di questa contro m è prodotta dalla differenza delle due loro velocità colla quale agiscono le molecole dell'acqua affluente disposte in una superficie m sulle molecole del livello m, con cui sono a contatto.

Che l'azione dell'acqua affluente sia prodotta dalla detta differenza delle due velocità cioè da $\frac{kfc}{m} - \frac{fc}{m}$, o da $(k-1)\frac{fc}{m}$ è evidente imperocchè la velocità $\frac{kfc}{m}$ è maggiore di $\frac{fc}{m}$: perchè se fosse uguale non produrrebbe azione di sorta, e se minore l'acqua affluente non potrebbe essere a contatto col fluido del recipiente, quindi non si avrebbe la continuità del fluido in moto e sarebbe il caso del recipiente che si va vuotando per l' efflusso dalla luce. Essendo dunque maggiore la velocità dell'acqua affluente, coll'eccesso di questa sulla velocità della superficie m si forma la pressione, o a dir meglio con un strato di molecole dell'acqua affluente disposte in una estenzione m ed investite dalla velocità $(k-1)\frac{fc}{m}$ si forma la pressione sul livello m. Per trovare questo strato di estenzione m si consideri la falda fluida mdl che nel tempo dt subentra alla stessa falda che si è mossa in pari tempo nel fluido del recipiente. Questa falda avrà velocità premente $(k-1)\frac{fc}{m}\,mdl$. Se di questa

se ne prende la parte dt^{ma}, o si divida per dt si avrà lo strato di molecole di estenzione m: dunque la pressione di questo strato contro la superficie m sarà $(k-1)\frac{fc}{m}m\frac{dl}{dt}$ ma

$\frac{dl}{dt}=u=\frac{fc}{m}$: dunque la detta pressione sarà $(k-1)\frac{f^2c^2}{m^2}m$: questa pressione essendo estesa in una superficie m, se si divide per m, il $(k-1)\frac{f^2c^2}{m^2}$ esprimerà la pressione in una unità di superficie, che è la pressione che deve porsi nel primo membro di (a. § 40).

Ma quel primo membro fu diviso (1.§34) per g, dunque prima di far l'aggiunta

$$\left(k-1\right)\frac{f^2c^2}{m^2}$$

al detto primo membro dovremo dividere questa quantità per g. Se dunque supporremo che il moto sia ridotto a permanente avremo

$$a+\left(k-1\right)\frac{f^2c^2}{gm^2}=\frac{c^2}{2g}\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right)$$

dalla quale

$$\frac{c^2}{2g}=\frac{a}{1-\left(2k-1\right)\frac{f^2}{m^2}}\;.$$

47. **Applicazioni della teoria del moto permanente.** *Dimostrare che le parabole descritte dalle linee fluide, che escono da piccoli orifizi fatti nella parete d'un cilindro verticale ove il liquido è mantenuto ad un livello costante, sono tutte tangenti ad uno stesso cono, di cui le generatrici fanno colla verticale un angolo semiretto.*

Tre vasi A , B , C *di larghe sezioni, dei quali il primo è inesausto, sono collocati l'uno accosto all'altro. Il vaso* A

comunica col vaso B per una piccola luce ω : il vaso B col C comunica per una luce ω': finalmente dal vaso C esce l'acqua per una piccola luce ω''. Questi tre orifizi sono situati in uno stesso piano orizzontale. L'altezza del livello del vaso A su questo piano è h , e si suppone che abbia luogo il moto permanente. Si domanda la quantità di fluido che passa per uno qualunque di questi orifizi nell'unità di tempo.

La quantità domandata è

$$\sqrt{\left(\frac{2gh}{\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega'^2}+\frac{1}{\omega''^2}}\right)}.$$

CAPO VIII.

Portata d'un orifizio di grandezza qualunque terminato da linea della quale si possa aver l'equazione, praticato lateralmente in un vaso inesausto nel quale abbia luogo il moto permanente.

48. Si supponga che la linea terminante la luce sia simmetrica rispetto l'asse delle ascisse, e che questo sia verticale. Sia h la distanza del vertice di questo asse dal livello. Se $2y$ sia il doppio dell'ordinata orizzontale nella luce corrispondente all'ascissa x, sarà $2ydx$ il rettangolo infinitesimo, di cui i punti sono distanti dal livello di $x+h$: dunque la velocità costante delle molecole, che escono da questo rettangolo sarà $\sqrt{2g(x+h)}$, e perciò la quantità d'acqua che esce in un tempo unità da questo rettangolo sarà

$$2ydx\sqrt{[2g(x+h)]}\ ,$$

e la quantità totale Q che esce dalla parte della luce corrispondente all'ascissa x sarà

$$Q=2\sqrt{2g}\int ydx\sqrt{(x+h)}.$$

49. **Altezza media.** Se si supponga che le molecole dell' acqua escano da tutti i punti della luce colla stessa velocità dovuta ad una altezza tale H, che nello stesso tempo diano la portata che danno uscendo dai diversi punti della luce colle loro rispettive velocità, questa altezza H dicesi *altezza media*, e la velocità corrispondente a questa altezza si dice *velocità media*. In questa ipotesi la portata sarà espressa da

$$2\sqrt{2g\mathrm{H}}\int y\,dx:$$

dunque

$$\sqrt{\mathrm{H}}\int y\,dx=\int y\,dx\sqrt{(x+h)}\,,$$

ed

$$\mathrm{H}=\left(\frac{\int y\,dx\sqrt{(x+h)}}{\int y\,dx}\right)^2$$

valore dell'altezza media.

Se la luce è a fior d' acqua sarà $h=0$, quindi la formola della portata sarà

$$\mathrm{Q}=2\sqrt{2g}\int y\,dx\sqrt{x}$$

e quella dell'altezza media sarà

$$\mathrm{H}=\left(\frac{\int y\,dx\sqrt{x}}{\int y\,dx}\right)^2$$

50. **Riflessione sull'altezza media.** Chi volesse calcolare colla formola antecedente l'altezza media per determinare la portata della luce dovrebbe eseguir i due integrali della detta formola, dividere il primo pel secondo e fare il quadrato del risultamento. Ma solo coll'eseguire l'integrale del numeratore subito si ha la portata col moltiplicarlo per $2\sqrt{2g}$: dunque non è che rendere più laborioso il calcolo il dedurre la portata dalla velocità media. Egli è meglio calcolarla immediatamente colla formola data: quindi

non so come si sia introdotta da qualche idraulico la determinazione dell'altezza media per aver la portata.

Se dal risultamento della portata si separerà il fattore che sia l'area della luce, e si porterà sotto il $\sqrt{2g}$ l'altro fattore, è chiaro che il quadrato di questo fattore sarà l'altezza media.

51. **Applicazione della formola della portata.** Sia la luce un quadrato, dentro il quale sia iscritto un circolo. Inoltre vi si consideri prima un triangolo isoscele di base uguale al lato del quadrato col vertice all'insù, e poi col vertice all'ingiù. Si supponga prima la luce quadrata, poi circolare, e finalmente triangolare isoscele col vertice all'insù, ed all'ingiù, e si vogliano le quattro portate nella stessa unità di tempo. Sia a il lato del quadrato avremo

$$Q=a\sqrt{2g}\int_0^a dx\sqrt{x}=\frac{2}{3}a^2\sqrt{2ga}$$

Per la luce circolare avremo

$$Q=2\sqrt{2g}\int_0^a xdx\sqrt{(a-x)}.$$

Integrando per parti avremo

$$\int xdx\sqrt{(a-x)}=-\frac{2}{3}x\left(a-x\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\int dx\left(a-x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{2}{3}x\left(a-x\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}\left(a-x\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Questo integrale portato al limite $x=a$ sarà zero, ed al limite $x=0$ ci dà

$$-\frac{4}{15}\left(a\right)^{\frac{5}{2}},$$

che sottratto dal valore del limite antecedente ci da

$$\frac{4}{15}\left(a\right)^{\frac{5}{2}}:$$

dunque

$$Q=\frac{8}{15}\,a^2\sqrt{2ga}.$$

Pel triangolo col vertice in alto abbiamo $y=mx$ ove $m=\frac{1}{2}$: dunque

$$Q=\sqrt{2g}\int_0^a x\,dx\sqrt{x}=\frac{2}{5}\,a^2\sqrt{2ga}$$

Pel triangolo col vertice in basso abbiamo

$$y=\frac{1}{2}(a-x)$$

dunque

$$Q=\frac{4}{15}\,a^2\sqrt{2ga}$$

Da questi risultamenti si ricava che la portata del triangolo col vertice in basso, del triangolo col vertice in alto, del circolo e del quadrato sono come i numeri 2, 3, 4, 5.

52. **Esempio della determinazione dell' altezza media.** Riguardando la portata

$$\frac{2}{3}\,a^2\sqrt{2ga}$$

del quadrato e riducendola alla forma

$$a^2\sqrt{\left(2g\,.\,\frac{4}{9}\,a\right)}$$

essendo il fattore a^2 l'area della luce il fattore di $2g$ ossia $\frac{4}{9}\,a$ sarà l'altezza media.

La portata del triangolo col vertice in alto era

$$\frac{2}{5}a^2\sqrt{2ga}.$$

L'area di questo triangolo è $\frac{a^2}{2}$: ora l'antecedente valore si può trasformare in

$$\frac{a^2}{2}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{2ga},$$

o in

$$\frac{a^2}{2}\cdot\sqrt{2g\cdot\frac{16a}{25}}$$

dunque l'altezza media è $\frac{16}{25}a$. La portata nel circolo è

$$\frac{8}{15}a^2\sqrt{2ga}.$$

Questa si può trasformare in

$$\pi a^2.\frac{8}{15\pi}\sqrt{2ga}$$

o in

$$\pi a^2\sqrt{2g\cdot\frac{64a}{225\pi^2}}$$

dunque l' altezza media sarà $\frac{64a}{225\pi^2}$.

53. **Maniera di trovare l'altezza media dal valore della portata.** In genere dal valore della portata si troverà l'altezza media così. *In questo valore si fisserà il fattore che esprima la luce, ciò che si potrà sempre ottenere, se faccia duopo con artifizio come nell'esempio antecedente. Il fattore poi che rimane fuori della radice si porti*

dentro questa; ed il fattore, che sotto il vincolo moltiplicherà il $2g$, sarà l'altezza media.

54. **Battente di una luce** è la distanza del vertice della luce dal livello.

55. **Relazione fra l'altezza media e la distanza del centro di gravità della luce dal livello.** *Per poco di battente che abbia una luce l'esperienza ci assicura, che per la distanza media si può prendere la distanza del di lei centro di gravità dal livello.*

Per vedere la relazione di questo fatto colla teoria si dica h il battente, x l'ascissa d'una doppia ordinata $2y$ della luce, sarà $\sqrt{2g(h+x)}$ la velocità di tutti i punti dell'elemento $2ydx$ di detta luce: ora è evidente, che questa espressione è l'ordinata di una parabola di parametro $2g$, o di ascissa $h+x$: fatta dunque una sezione secondo $h+x$ normale al piano della luce, s'immagini in questo piano disegnata la detta parabola col vertice al livello, allora le ordinate di questa curva corrispondenti alle diverse ascisse $h+x$, saranno le velocità degli elementi corrispondenti $2ydx$ nella luce; perciò questi elementi moltiplicati per le dette ordinate esprimeranno le portate degli elementi stessi in una unità di tempo, e la somma di questi elementi moltiplicati per le corrispondenti ordinate della parabola sarà la portata della luce in una unità di tempo. Ammettiamo il battente h grandissimo, la porzione di parabola che verrà dopo questa ascissa, e che ha per proiezione l'asse della luce sul piano di questa, si potrà considerare come una linea retta, come si sa dalla natura della parabola: in tal caso la somma degli elementi $2ydx$ della luce nelle ordinate della parabola sarà la somma degli elementi riuniti nei loro centri di gravità, che sono nel detto asse, moltiplicati per le distanze dalla retta parabolica, ossia sarà la somma de' momenti dei detti elementi rispetto questa retta: sarà dunque uguale all'intera area della luce moltiplicata per l'ordinata della parabola corris-

pondente al centro di gravità della detta luce. Se dunque si dica $h+c$ l'ascissa del detto centro di gravità quella somma di elementi $2ydx$ moltiplicati per le respettive ordinate paraboliche, o la portata della luce in una unità di tempo sarà uguale all'area della luce moltiplicata per $\sqrt{2g(h+c)}$: dunque per altezza media si può prendere $h+c$, o la distanza del centro di gravità dal livello: quindi la teoria vuole che affinchè l'una quantità si possa scambiare nell'altra il battente sia grandissimo: all'esperienza poi basta che questo battente non sia piccolissimo. Si risolvano i problemi.

Dato che l'oncia d'acqua abbia una larghezza l'=pollici 3, *una altezza* a'=pollici 4 *ed un battente* b'=pollici 2, *determinare i pollici* x *che si avranno da una luce rettangolare, la cui larghezza sia* l=pollici 420, *e l'altezza* a=pollici 30 *senza battente.* Sarà

$$= \frac{la\sqrt{a}}{l'[(a'+b')\sqrt{(a'+b')}-b'\sqrt{b'}]},$$

cioè pollici 1938 in circa

Determinare la portata di una luce trapezia di basi 2p, 2q *bisegate da una retta di lunghezza* a *ad esse normale e con un battente* h.

Ad una data distanza b=4^p *dal piano di livello aprire un tale emissario rettangolare di una data area* r=pollici qua. 42 *che in un dato tempo* t=or.1 *si abbia da esso la massima portata.* Sarà

$$x = \frac{5t}{6}\sqrt{\frac{gr}{2}}\left[\sqrt{\left(b+\sqrt{r}\right)^3}-b\sqrt{b}\right]$$

=pollici cnbi 6784978.08.

Sia da *trovare la quantità d'acqua che esce in una unità di tempo da una luce rettangolare di cui due lati* a *siano orizzontali e distino dal livello di* h *e* h'.

La portata richiesta sarà

$$\frac{2}{3}a\sqrt{2g}(h'^{\frac{3}{2}}-h^{\frac{3}{2}})$$

Si suppone un vaso di cui la superficie inferiore è una mezza elissoide aperta secondo un piano principale. L'apertura è orizzontale, e la concavità è voltata verso l'alto. Si domanda di segare il vaso con un secondo piano orizzontale in guisa che rimanendo il vaso inesausto la velocità del liquido, che esce dall'apertura inferiore, sia un minimo. Si domanda ancora di trovare il piano secante colla condizione che il volume del liquido che ne esce in un tempo dato sia un massino.

Siano a, b, c li semiassi dell'elissoide, l'ultimo di questi assi essendo verticale, e z la distanza del piano secante dal livello costante del liquido. La velocità del liquido all'uscita dall'apertura inferiore è

$$\sqrt{\frac{2gz}{1-\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^2}}$$

questa velocità sarà un minimo quando il binomio $2c^2z-z^3$ sarà un massimo, cioè quando sarà

$$z=c\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Il volume del liquido che esce nell'unità di tempo è

$$\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\sqrt{\frac{2gz}{1-\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^2}}$$

questo valore sarà un massimo quando sia tale la quantità

$$\frac{(c^2-z^2)^2}{2c^2z-z^3}$$

cioè quando

$$z^2=c^2\,\frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

CAPO IX.

Teoria del moto lineare nei vasi che si vuotano per l'efflusso.

56. **Equazione per la celerità nel vaso che si vuota.** Dicendo x l'altezza verticale del fluido e supponendo che le pressioni dell'aria A B allo sezioni suprema ed infima siano uguali, il quadrinomio (§ 40) A—B+k—h sarà x e quindi avremo

$$x = \frac{f\mathrm{d}c}{g\mathrm{d}t}\int\frac{\mathrm{d}l}{y} + \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right).$$

Se si suppone la luce piccolissima si potranno trascurare i termini affetti del suo valore f, e quindi avremo $\frac{c^2}{2g} = x$: cioè l'altezza dovuta alla celerità della luce è l'altezza variabile del livello sopra di essa, e ciò qualunque sia la figura del vaso, purchè però la direzione del moto lineare sia verticale, o quasi verticale (§ 38).

57. **Vaso prismatico verticale.** Se il vaso è prismatico e verticale di sezione costante m sarà

$$\frac{\mathrm{d}l}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{m}.$$

Il segno negativo proviene da questo che la l si suppone computata dall'alto, e la x dal basso. Dall'antecedente equazione abbiamo

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{m} = -\frac{x}{m}.$$

Il principio di questo integrale ad un tempo t corrisponde ad x, ed il fine alla $x=0$: sottraendo dunque il primo

dal secondo sarà

$$\int_x^0 -\frac{dx}{m}=\frac{x}{m}:$$

quindi la formola (§ 56) diventerà

$$x=\frac{fxdc}{gmdt}+\frac{c^2}{2g}\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right).$$

Avendosi le tre variabili c, x, t in questa equazione, per toglierne una si avverta, che la quantità d'acqua che esce nel tempo dt dalla luce è $fcdt$, e la falda fluida che si abbassa in pari tempo alla distanza x, è $-mdx$: ora l'uniformità del moto (§ 25) vuole che la prima quantità sia uguale alla seconda : dunque $fcdt=-mdx$. Eliminando con questa la dt dall'antecedente equazione avremo

$$x=-\frac{f^2}{m^2}\cdot\frac{xcdc}{gdx}+\frac{c^2}{2g}\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right).$$

Si faccia $\frac{c^2}{2g}=s$, ed $\frac{m^2}{f^2}-1=n$ avremo

$$xds-[ns-(n+1)x]dx=0.$$

In questa equazione differenziale i coefficienti x, $ns-(n+1)x$ dei differenziali sono funzioni omogenee di x ed s, quindi si faccia $s=ux$ avremo $ds=udx+xdu$ quindi l'equazione antecedente diventerà

$$udx+xdu-[nu-(n+1)]dx=0$$

dalla quale

$$\frac{du}{(n-1)u-(n+1)}-\frac{dx}{x}=0$$

ed integrando

$$\frac{1}{n-1}\,l\left[\left(n-1\right)u-\left(n+1\right)\right]-lx=l\,C$$

d'onde

$$l\left[\frac{(n-1)s-(n+1)x}{x^n}\right]=l\,C$$

ossia

$$\frac{(n-1)s-(n+1)x}{x^n}=C.$$

Al principio del moto sia

$$v=0,\ o\ s=0,\ x=a$$

avremo

$$C=-\frac{(n+1)}{a^{n-1}},$$

quindi

$$\frac{(n-1)s-(n+1)x}{x^n}=-\frac{(n+1)}{a^{n-1}},$$

che risoluta per s ci darà

$$(a)\qquad s=\frac{n+1}{n-1}\,a\left(\frac{x}{a}-\frac{x^n}{a^n}\right).$$

58. **Altra maniera d'integrare l'equazione della velocità.** La stessa equazione si può integrare col metodo dei moltiplicatori che consiste in questo. Se una equazione differenziale per esempio $Pdx+Qdy=0$ diventa differenziale esatto col moltiplicarla per M, ove la M è una funzione di x, y, sia R l'integrale che ne sorge, onde

$$MPdx+MQdy=dR$$

Ora se questa equazione si moltiplica per una funzione qualunque di R o per F.R sarà

$$MF.RPdx+MF.RQdy=F.RdR$$

Come il secondo membro è un differenziale esatto così anche lo sarà il primo: dunque per uno solo dei moltiplicatori, che si conosca rendere integrabile l'equazione diffe-

renziale proposta se ne possano trovare infiniti compresi nella formola MF.R, ove R è l'integrale ottenuto col moltiplicatore trovato.

Ciò posto nell'equazione superiore

$$xds - nsdx = -(n+1)xdx$$

si vede chiaramente, che se si moltiplica il primo membro per $\frac{1}{sx}$ il risultamento $\frac{ds}{s} - n\frac{dx}{x}$ è integrabile e ci da $ls - nlx$, ossia $l\frac{s}{x^n}$, dunque la formola dei moltiplicatori del primo membro sarà

$$\frac{1}{sx}\text{ F. } l\frac{s}{x^n},$$

ossia

$$\frac{1}{sx}\text{ F. }\frac{s}{x^n},$$

o anche $\frac{1}{x^{n+1}}$: ma qualunque funzione di x che moltiplichi il secondo membro lo mantiene integrabile: dunque il moltiplicatore è $\frac{1}{x^{n+1}}$. Fatta la moltiplicazione si farà subito l'integrazione, e si otterrà il risultamento antecedente (§ 57).

Se nell' ugnaglianza $\frac{m^2}{f^2} - 1 = n$ si faccia $m^2 = 2f^2$ si avrà $n = 1$, che rende $\frac{0}{0}$ il valore di s nell'equazione ((a)§57). Per avere il valore in questa indeterminazione secondo il metodo noto si deve ricorrere alla differenziazione, ma già abbiamo l'equazione differenziale

$$xds - nsdx = -(n+1)xdu$$

dove fatto $n=1$ ci darà $xds-sdx=-2xdx$ ora se il moltiplicatore dell'antecedente equazione (§ 58) era $\frac{1}{x^{n+1}}$, il moltiplicatore di questa sarà $\frac{1}{x^2}$.
Introdotto questo moltiplicatore, e fatta l'integrazione coll'ipotesi di $s=0$, $x=a$ avremo

$$s=2x\, l\, \frac{a}{x}\,.$$

ove avendosi un risultamento trascendente si vede chiaro perchè si abbia avuto una risposta che non dava valore colla sostituzione di $n=1$ nell'equazione algebraica ((a)§57).

Se si suppone la luce piccolissima nell'uguaglianza $\frac{m^2}{f^2}-1=n$ viene n grandissima, e perciò nell'equazione

$$s=\frac{n+1}{n-1}\,a\left(\frac{x}{a}-\frac{x^n}{a^n}\right)$$

trascurando la piccolissima frazione $\frac{x^n}{a^n}$ e l'unità aggiunta e sottratta da n, avremo $s=x$; cioè l' altezza dovuta alla celerità dell'efflusso, è l'altezza variabile del livello sopra la luce, come si era trovato nel (§ 56).

Si supponga $f=m$, cioè il vaso senza fondo. In questa ipotesi avremo $n=0$ e dall' equazione antecedente ricaveremo $s=a-x$, cioè l' altezza dovuta alla celerità dell'acqua effluente è l'altezza percorsa dal livello, ciò che deve essere in una massa che cade liberamente nel recipiente prismatico verticale.

59. **Luogo della massima celerità nel vaso prismatico verticale che si vuota.** L'equazione ((a) § 57) diventa zero quando $x=a$, e quando $x=0$ cioè al principio ed al

termine del moto, e poichè da quel primo punto prende esistenza la celerità per tornare a zero alla fine del moto, quindi deve toccare un valore tale dopo il quale deve decrescere: questo valore è il massimo. Dopo ciò per trovare il luogo di ascissa x dove arrivando la sezione superiore mobile abbia la velocità massima, è chiaro che si dovrà assoggettare alla condizione del massimo il fattore variabile

$$\frac{x}{a}-\frac{x^n}{a^n},$$

o

$$x-\frac{x^n}{a^{n-1}},$$

dell'equazione ((a)§57): quindi deve essere

$$1-n\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}}=0,$$

da cui

$$x=an^{\frac{1}{1-n}}.$$

Sostituito questo valore nell'equazione (§ 57) avremo

$$s=a(n+1)n^{\frac{n}{1-n}},$$

che è l'altezza dovuta alla celerità massima. Infatti la derivata di

$$1-n\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}}$$

è negativa.

60. **Luogo della celerità massima quando la luce è piccolissima.** In questo caso essendo

$$n=\frac{m^2}{f^2}-1$$

(§ 57) sarà n grandissimo, onde

$$n^{\frac{1}{1-n}}$$

sarà prossimamente

$$n^{-\frac{1}{n}}.$$

Si ponga

$$n^{\frac{1}{n}}=1+i\,,$$

sarà $n=(1+i)^n$. Qui la i non può esser zero, perchè il grandissimo valore n sarebbe uno. Non può essere la i negativa perchè il risultamento numerico $1+i$ o sarebbe zero ovvero maggiore o minore dell' unità. Il primo caso non può combinarsi col valore sempre esistente di n, e negli altri due casi il secondo membro dell' equazione $n=(1+i)^n$ sarebbe o assai maggiore, o assai minore del primo. Rimane il caso di i positiva; che se non fosse piccolissima, aggiunta all'unità ed elevata ad esponente altissimo darebbe assai più del valore di questo esponente che costituisce il primo membro. Prendendo i logaritmi neperiani nell'equazione

$$n^{\frac{1}{n}}=1+i$$

e sviluppando $l\,(1+i)$ col rimanerci nel primo termine della serie di i piccolissima, avremo

$$\frac{1}{n}\,ln=i\;:$$

quindi

$$n^{-\frac{1}{n}}=(1+i)^{-1}=\left(1+\frac{1}{n}\;ln\;\right)^{-1}=1-\frac{1}{n}\,ln,$$

e ciò rimanendoci al secondo termine dello sviluppo del binomio. Avremo dopo ciò

$$x=an^{\frac{1}{1-n}}=an^{-\frac{1}{n}}.$$

ed

$$x=a-\frac{a}{n}\,ln.$$

Si aveva eziandio

$$s=a(n+1)n^{\frac{n}{1-n}}.$$

Nella ipotesi di n grandissimo avremo

$$s=a(n+1)n^{-1}=a\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Dal valore di x si ricava, che quando il livello si è abbassato di $\frac{a}{n}\,ln$ le molecole alla luce, e perciò anche esso livello hanno la massima velocità. Ora questa quantità è piccolissima, perchè il logaritmo d'un numero grandissimo è più piccolo assai dello stesso numero: quindi si può dire che appena il livello si spicca dalla più alta sua situazione tocca la velocità massima: ciò che si conferma da questo che nell'ipotesi di n grandissimo

$$s=a\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ci dà s prossimamente eguale a; cioè che l'altezza dovuta alla celerità massima colla quale le molecole escono dalla luce è quasi l'altezza primordiale del detto livello.

CAPO X.

Tempo e portata nei vasi verticali che si vuotano per l'efflusso da piccola luce.

61. **Equazione del tempo.** In cotali vasi abbiamo l'equazione $fcdt = -mdx$ (§ 57), e $c = \sqrt{2gx}$ (§ 56), quindi

$$dt = -\frac{mdx}{f\sqrt{2gx}}$$

sarà l'equazione differenziale per avere il tempo nei vasi verticali che si vuotano da piccola luce.

62. **Equazione della portata.** Indicando per Q la portata per un tempo qualunque t, e trovandosi il livello ad una altezza qualunque x sopra la luce avremo

$$dQ = fcdt = fdt\sqrt{2gx},$$

e $dQ = -mdx$; che saranno due equazioni differenziali per la portata: la prima dipendente del tempo, e l'altra dipendente dall'altezza x del livello. Infatti quando dall'integrazione dell'equazione

$$dt = -\frac{mdx}{f\sqrt{2gx}}$$

ricaveremo x in t sostituito questo valore di x nell'equazione $dQ = fdt\sqrt{2gx}$ coll'integrazione avremo la portata in funzione del tempo.

Egli è poi evidente, che in tutte queste equazioni differenziali si dovrà dare la m in x.

63. **Caso del vaso prismatico verticale.** Sia il vaso prismatico, sarà m costante. Fatta l'integrazione dell'equazione

$$dt = -\frac{mdx}{f\sqrt{2gx}},$$

e determinata la costante colla condizione che al principio del moto sia $t=0$, ed $x=a$, ove a è l'altezza iniziale del livello, avremo

$$t=\frac{2m}{f\sqrt{2g}}(\sqrt{a}-\sqrt{x}).$$

Isolando in un membro $\sqrt{x}$ poi elevando al quadrato l'equazione, e trasportando la x ove troverassi la a avremo

$$a-x=\frac{ft\sqrt{2ga}}{m}-\frac{gf^2t^2}{2m^2}$$

64. **Natura del moto nella discesa del livello.** Dalla meccanica abbiamo che l'equazione

$$s=ct-\frac{gt^2}{2}$$

è l'equazione del moto ritardato dei gravi lanciati in alto: ove s è lo spazio percorso, la c è la celerità iniziale colla quale è gittato in alto il grave, e g è la gravità ritardatrice. Confrontando questa equazione coll'antecedente si vede essere della stessa forma: quindi il livello nel vaso prismatico verticale, che si vuota per l' efflusso da piccola luce, discende con moto uniformemente ritardato, in cui $a-x$ è lo spazio percorso nel tempo t, $\frac{f\sqrt{2ga}}{m}$ è la velocità iniziale, che appunto è tale perchè $\sqrt{2ga}$ è la velocità iniziale alla luce e quindi $\frac{f\sqrt{2ga}}{m}$ è la velocità iniziale del livello. Finalmente $\frac{gf^2}{m^2}$ deve essere la forza ritardatrice che è la gravità modificata dalla frazione $\frac{f^2}{m^2}$ moltiplicatrice. Da ciò si ricava che cominciando l' efflusso, il livello parte dalla sua posizione colla velocità $\frac{f\sqrt{2ga}}{m}$, e che questa va dimi-

nuendo a causa del moto ritardato. La forza ritardatrice essendo la gravità modificata espressa dal valore $\frac{gf^2}{m^2}$ si vede chiaro, che quella gravità assoluta, che ha prodotto nel livello la velocità $\frac{f}{m}\sqrt{2ga}$ al principio del moto, a causa dell' angustia della luce f avendo una reazione, si modifica nel valore $\frac{gf^2}{m^2}$ ed agisce all' insù a ritardare costantemente il moto.

65. **Equazione della portata nel vaso prismatico verticale.** Prendendo l'equazione $dQ=-mdx$ integrando e determinando la costante colla condizione che al principio del moto ove $x=a$, la portata è nulla, avremo $Q=m(a-x)$. Se in questa si ponga il valore di $a-x$ avuto in (§ 63) avremo subito il risultamento

$$Q=ft\sqrt{2ga}-\frac{gf^2t^2}{2m}$$

che è portata in funzione del tempo.

66. **Conseguenze dalla equazione della portata.** Dalla equazione (§ 63) fatto $x=0$ avremo che il tempo del vuotamento del vaso è

$$t=\frac{m}{f}\sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

Si ponga questo valore nell'equazione (§ 65) della portata ed avremo $Q=ma$ come doveva essere; perchè nel tempo totale del moto esce dall'orifizio quantità di fluido uguale al volume del recipiente, essendosi supposto uno la sua densità.

67. Considerando l'equazione (§ 65) della portata posta sotto la forma

$$Q=ft\left(\sqrt{2ga}-\frac{gft}{2m}\right)$$

si vede che diventa zero e quando $t=0$, e quando

$$\sqrt{2ga}-\frac{gft}{2m}=0$$

ossia pel valore di

$$t=\frac{2m}{f}\sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

Da ciò si ricava, che deve esserci un tempo t in cui la portata è massima. Assoggettando alla condizione del massimo il fattore variabile

$$t\sqrt{2ga}-\frac{gft^2}{2m}$$

del valore della portata Q troveremo

$$t=\frac{m}{f}\sqrt{\frac{2a}{g}},$$

ed il valore massimo sarà $Q=ma$.

68. Confrontando i due casi del (§ 67) col caso del (§ 66) si vede primo, che il tempo

$$t=\frac{m}{f}\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

è quello in cui si ha il vuotamento del recipiente e la portata massima ma della luce, ciò che deve essere: secondo che ad un tempo doppio

$$\frac{2m}{f}\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

di questo or detto la portata torna ad essere zero, essendo continuamente decrescente dal valor massimo. Se il tempo crescesse la portata si farebbe negativa.

Si vede però chiaro che questi valori di Q dopo il massimo non sono valori di portata, ma sono valori soddisfacenti alla formola diventata astratta dopo quel punto del massimo.

69. **Rappresentanza geometrica della equazione della portata**. Se l' equazione (§ 65) si pone sotto la forma

$$Q = \frac{ma}{\frac{2m^2a}{f^2g}} \left(\frac{2m}{f} t \sqrt{\frac{2a}{g}} - t^2 \right)$$

si vede che rappresenta un ellisse di cui il semiasse, su cui sono computate dal vertice le ascisse t è

$$\frac{m}{f} \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

e l'altro semiasse cui sono parallele le ordinate $\sqrt{Q}$ è $\sqrt{ma}$: quindi di questa ellisse le ascisse sono i tempi, e le ordinate sono le radici delle portate corrispondenti; e combina che come le ordinate sono zero all'ascissa zero, ed all'ascissa ugnale al doppio del semiasse

$$\frac{m}{f} \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

così le portate si trovano nulle a questi due valori del tempo.

La massima ordinata è all'ascissa o al semiasse

$$\frac{m}{f} \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

e questa massima ordinata è l'altro semiasse $\sqrt{ma}$: dunque il massimo valore di $\sqrt{Q}$ è $\sqrt{ma}$, e questo corrisponde al tempo

$$\frac{m}{f} \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

come si aveva di sopra (§ 67). Da ciò si ricava che il primo quarto d'ellisse rappresenta la realtà della portata, e che l'intera mezza ellisse rappresenta la formola della portata (§ 65) per tutti i valori di t nei quali la Q è positiva. Gli altri valori di t che danno Q negativa nè sono nel caso dell'attuale efflusso dalla luce, nè nel caso dell'ellisse rappresentante la detta equazione della portata: talchè si può dire che i valori di t da zero fino a

$$t=\frac{m}{f}\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

sono valori fisici, algebrici, e geometrici della formola (§ 67); che quelli da

$$t=\frac{m}{f}\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

fino a

$$t=\frac{2m}{f}\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

inclusive sono algebrici e geometrici, e che gli altri dopo questo valore di t sono solamente algebrici.

70. **Si tratta delle clessidre.** Gli abbassamenti dell'acqua in un vaso prismatico verticale possono servire alla misura del tempo, e ciò perchè nell'equazione

$$(a) \qquad t=\frac{2m}{f\sqrt{2g}}(\sqrt{a}-\sqrt{x})$$

troviamo la relazione fra le diverse altezze sull'orifizio del detto livello ed i tempi corrispondenti: quindi se alla parete del recipiente si faranno segni nelle dette altezze sapremo i tempi impiegati dal livello per giungervi. Cotali recipienti si dicono *orologi ad acqua*, o *clessidre*. Per fare questa graduazione abbiamo bisogno in primo luogo di fissare il tempo del totale abbassamento del livello, o del vuota-

mento del recipiente, e di qui ricavare l'altezze di questo; in seguito si deve avere la x data in tempo, il quale secondo che sarà in ore, quarti ec. avremo le altezze x, dove si deve avere *ex . gr .* un ora, due ore ec, tempo impiegato dal livello per arrivarvi, o per mettersi a quella altezza sopra la luce.

Se nella formola antecedente si faccia $x=0$ avremo

$$T=\frac{2m\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}}$$

pel valore del tempo T del vuotamento del vaso. Da questa abbiamo

$$a=\frac{gf^2T^2}{2m^2}.$$

La $g=9^m.81$ prossimamente, ove 9.81 sono i metri che percorrebbe un grave uniformemente in un secondo colla velocità che acquisterebbe cadendo in un secondo liberamente da una altezza di metri 4, 9. Dopo ciò se si voglia, che il vaso si vuoti in 12 ore, o che il livello percorra l'altezza del vaso abbassandosi in 12 ore fino al fondo, nell'equazione antecedente si dovrà porre 12×3600 invece di T. Si pone questo numero che è in secondi piuttosto che 12 ore, perchè la g che si trova nella detta equazione è data in secondi: quindi abbiamo

$$a=4.9\left(43200\frac{f}{m}\right)^2.$$

In questa equazione sostituendo i valori della luce f, e della sezione costante m del prisma o cilindro si avrà l'altezza domandata.

Per trovare le diverse altezze sopra la luce alle quali giungendo il livello impieghi *ex . gr .* un'ora, due ore ec. ci serviremo dell'equazione

$$x=\left(\sqrt{a}-\frac{tf\sqrt{2g}}{2m}\right)^2$$

ricavata dalla (a. §70), dove si farà successivamente $t=1$, $t=2$, $t=3$ ec.

71. **Figure di vasi che soddisfano ai problemi sulle clessidre.** Si potrebbe desiderare di avere figure di recipienti verticali, nei quali gl'intervalli delle divisioni fatte nella verticale, che corrispondono ad uguali intervalli di tempo, fossero pure uguali. Ciò si riduce a supporre nell'equazione generale

$$\mathrm{d}t=-\frac{m\mathrm{d}x}{f\sqrt{2gx}}$$

che la variazione $\mathrm{d}x$ delle altezze sia proporzionale alle variazione $\mathrm{d}t$ del tempo, ossia a supporre $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{A}$, o $t=\mathrm{A}x$. Per determinare A si supponga, che l'altezza del recipiente sia 4 metri, e che si debba vuotare in 12 ore, in $t=\mathrm{A}x$ porremo il tempo totale ridotto a minuti secondi cioè 12×3600; e l'altezza totale del recipiente cioè $x=4^{m}$, avremo $\mathrm{A}=3\times3600$. Se nell'equazione

$$\mathrm{d}t=-\frac{m\mathrm{d}x}{f\sqrt{2gx}}$$

si pone $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{A}$ avremo $m=-\mathrm{A}f\sqrt{2gx}$.

Per conoscere ora le figure del vaso soddisfacenti alla dimanda, che agli intervalli uguali della verticale del detto vaso corrispondano tempi uguali, basterà trovare la figura di m o della sezione qualunque corrispondente all'ascissa x. Se si vuole che sia un rettangolo pel cui centro passi l'asse verticale e che abbia b per un lato e $2y$ per l'altro

sarà $m=2yb$, e quindi $2yb=-Af\sqrt{2gx}$, ossia

$$y^2=\frac{A^2f^2gx}{2b^2}$$

equazione alla parabola, di cui il vertice sarà nel basso, cioè la figura del vaso deve esser tale che avendo una grossezza costante b le sezioni verticali sieno limitate da parabole identiche.

Se si volesse che le sezioni orizzontali fossero circolari per i cui centri passasse l'asse verticale del vaso, ossia che il vaso fosse prodotto dalla rivoluzione d'una curva, in tal caso dicendo y il raggio variabile del circolo sarebbe $m=\pi y^2$: quindi

$$y^4=\frac{2A^2f^2gx}{\pi^2}$$

che è l'equazione della linea generante il recipiente di rivoluzione che soddisfa al quesito. Questa curva si potrebbe descrivere per punti e quindi costruire il vaso.

Nell'equazione

$$dt=-\frac{mdx}{f\sqrt{2gx}}$$

si possono fare diverse applicazioni secondo che si supsupponga essere m rappresentato da diverse funzioni di x.

Si supponga m *la sezione d'un paraboloide sarà* $m=\pi px$ *ove* p *è la costante della parabola.*

Sia m *la sezione d'una piramide, o cono col vertice nel basso sarà* m *proporzionale al quadrato di* x, *quindi* $m=nx^2$.

Sia $m=\pi(2rx-x^2)$ *ed avremo per vaso un calotta sferica col vertice in basso.*

Per esercizio si compiano i computi dei dati problemi.

Sia anche il quesito. *Con un vaso cilindrico nella cui base di diametro* $\frac{1}{4}$ *di piede è una piccola luce circolare di*

raggio z , costruire un orologio ad acqua diviso in 6 ore , dato che l'acqua cominci a scendere da una data altezza di piedi 1 $\frac{1}{2}$. Deve essere z=lin. 0.09 in circa. Inoltre la prima divisione, che segnerà la prima ora in alto, avrà una lunghezza di pollici 5 $\frac{1}{2}$, la seconda di pollici 4 $\frac{1}{2}$ cc. in progressione aritmetica.

Sia anche il quesito. *Un vaso formato di una mezza sfera, e d'un piano che passa pel centro è forato di due piccole luci uguali l'una situata alla sommità di detta semisfera, l'altra nel piano. Questo vaso è esattamente pieno di acqua, e può vuotarsi per ciascuno dei due orifizi secondo due posizioni del vaso. Si domanda il rapporto dei tempi dei due vuotamenti.* Se T, è T' esprimono i due tempi del vuotamento per la luce del vertice e per quella nel piano avremo

$$\frac{T'}{T} = \frac{7}{12}$$

Dimostrare, che un vaso cilindrico riempito di acqua, e forato alla base con piccola luce impiega per vuotarsi un tempo doppio di quello, che basterebbe per lo scolo intero del liquido primitivamente riempiente il vaso reso inesausto a causa dell'afflusso di nuovo liquido, senza però l'effetto dell'afflusso.

Uscendo dalla luce piccolissima f in una unità di tempo l'acqua con una velocità $\sqrt{2gx}$, essendo x l'altezza del livello sopra di detta luce, entri nel recipiente al di sopra senza effetto d'afflusso altra acqua in quantità q in un tempo θ. La sezione del vaso all' altezza x sia X. Egli è evidente che nel tempo $d\theta$ la differenza fra l'acqua che entra e quella che esce dalla luce deve essere uguale alla falda fluida Xdx che aumenta il liquido di una altezza dx. Ciò posto *dimostrare che si ha l'equazione*

$$t = \int \frac{X dx}{\frac{q}{\theta} - f\sqrt{2gx}} \, .$$

ossia ponendo l'effetto della vena contratta

$$t=\int\frac{\mathrm{X}dx}{\frac{q}{\theta}-\frac{5}{8}f\sqrt{2gx}}.$$

Posta la formola antecedente determinare il tempo t *in cui una quantità d'acqua* q *entrando senza effetto d'afflusso per un tempo* θ *ed uscendo da una piccola luce* f *aperta nella base* m *d'un vaso prismatico verticale, il livello giunge dall'altezza* a *ove era in principio all'altezza* x *qualunque.* Avremo

$$t=\frac{8m}{5f}\sqrt{\frac{2}{g}}\left\{\sqrt{a}-\sqrt{x}+\frac{4g}{5\theta f}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[l\left(f'\sqrt{ax}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{8qf}{5\theta\sqrt{2g}}\frac{4q}{5\theta f}\sqrt{\frac{2}{g}}-\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\right]\right\}$$

CAPO XI.

Efflusso dell'acqua da luci di grandezza qualunque a fior d'acqua praticate in recipienti che si vuotano.

72. **Portata della luce.** Sia una luce trapezia colle basi parallele $2p$, $2q$, delle quali la prima sia al livello, e la retta bisecante ad angolo retto le dette due basi sia a; dalla soluzione del problema secondo della pag. 163 abbiamo per la portata Q di questo trapezio in una unità di tempo

$$\mathrm{Q}=\frac{4a\sqrt{2ga}}{15}\left(3q+2p\right).$$

Questa portata è pel caso della invariabilità del livello, o pel vaso inesausto. Nel caso attuale il livello si abbassa, e perciò si dica x l'altezza del livello dalla base della luce dopo un tempo t. Dopo ciò nell'equazione antecedente si ponga x in luogo di a. Ma la semibase superiore p si dovrà dare in x, perchè la

luce trapezia si diminuisce per l'abbassamento del livello. Si dica i l'inclinazione alla base $2q$ dei due lati non paralleli del trapezio, è evidente che $x\cot.i$ sarà la proiezione di uno dei detti lati sulla base: quindi avremo $p=q\pm x\cot.i$ Posto ciò la formola della portata in un tempo dt, o il differenzialo della portata sarà

$$dQ=\frac{4x\sqrt{2gx}}{15}\left(5q\pm 2x\cot.i\right)dt.$$

Sia M la sezione costante del recipiente sarà $-Mdx$ la falda fluida, che si abbassa nel tempo dt: questa dovrà essere uguale all'elemento antecedente della portata: dunque

$$-Mdx=\frac{4x\sqrt{2gx}}{15}\left(5q\pm 2x\cot.i\right)dt\,,$$

e

$$dt=-\frac{15M}{4\sqrt{2g}}\cdot\frac{dx}{x\sqrt{x}(5q\pm 2x\cot.i)}$$

si faccia $x=z^2$ avremo

$$dt=-\frac{15M}{2\sqrt{2g}}\cdot\frac{dz}{z^2(5q\pm 2z^2\cot.i)}$$

equazione subito integrabile dopo lo spezzamento della frazione.

73. **Tempo nella luce rettangolare.** Se la luce è un rettangolo sarà $\cot.i=0$, e quindi

$$dt=-\frac{3M}{4q\sqrt{2g}}\cdot\frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

che integrata supposto $t=0$, $x=a$ darà

$$t=\frac{3M}{2q}\left(\frac{1}{\sqrt{2gx}}-\frac{1}{\sqrt{2ga}}\right)(a):$$

dalla quale

$$(b) \qquad \sqrt{x} = \frac{3M\sqrt{a}}{3M + 2qt\sqrt{2ga}}$$

che serve a determinare ad ogni tempo l'altezza del livello.

74. **Portata nella luce rettangolare.** Abbiamo $dt = -Mdx$, la quale integrata e determinata la costante nell'ipotesi di $x=a$ quando $t=0$ ci darà $t=M(a-x)$, nella quale posto il valore di x ricavato dall'equazione antecedente (b) avremo la portata data in tempo.

75. **Confronto delle portate di due luci.** Supponiamo alla base orizzontale del prisma praticata una apertura rettangolare di lati a, b, e si domandi il tempo del moto del livello nel suo abbassamento, per dedurre il tempo del vuotamento del prisma. La portata di questa luce nel tempo dt sarà evidentemente $abdt\sqrt{2gx}$: questa deve essere uguale a $-Mdx$ dunque

$$dt = -\frac{M}{ab\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

integrando e determinando la costante nell'ipotesi di $t=0$ quando $x=a$ avremo

$$t = \frac{2M}{ab\sqrt{2g}}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right),$$

e pel tempo T del vuotamento che avviene quando $x=0$ sarà

$$T = \frac{2M}{b\sqrt{2ag}}.$$

Si prenda l'equazione (a. § 73)

$$t = \frac{3M}{2q}\left(\frac{1}{\sqrt{2gx}} - \frac{1}{\sqrt{2ga}}\right)$$

e si ponga per la base $2q$ del rettangolo la b, ed invece

di x si ponga $a-z$ ove la z sarà la verticale discesa del livello nel tempo t avremo

$$t=\frac{3M}{b}\left(\frac{1}{\sqrt{2g(a-z)}}-\frac{1}{\sqrt{2ga}}\right)$$

Col binomio newtoniano si sviluppi

$$\sqrt{a}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ed avremo

$$t=\frac{3M}{b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}\left(1-\frac{1}{2}\frac{z}{a}-\frac{1}{8}\frac{z^2}{a^2}-\frac{1}{16}\frac{z^3}{a^3}\right)}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

Se si voglia il tempo T del vuotamento si dovrà porre $z=a$: facendo ciò e ritenendo nella serie del denominatore i soli due primi termini ciò che si può in pratica, avremo

$$T=\frac{3M}{b\sqrt{2ga}}.$$

Confrontando questo tempo col tempo

$$\frac{2M}{b\sqrt{2ga}}$$

del vuotamento considerato innanzi si vedrà che se al recipiente prismatico verticale si facciano successivamente due aperture rettangolari identiche l'una al fondo orizzontale, e l'altra verticale coll'altezza uguale a quella del recipiente, il tempo del vuotamento per questa apertura è prossimamente $\frac{3}{2}$ di quello del vuotamento per l'altra.

CAPO XII.

Luci dei recipienti soggette a rigurgito.

76. **Divisione delle luci soggette a rigurgito.** Avviene nelle luci di grandezza valutabile, che parte dell'acqua che ne esce ristagni alla soglia fino ad una data altezza. Per questo l'intera luce, onde valutarne la portata, si deve dividere in due parti separate da un piano orizzontale; la parte superiore libera, e l'inferiore ingombra dall'acqua, che si arresta alla soglia. Nella parte superiore la celerità si valuta come nei due capi antecedenti secondo che il livello sia fisso o mobile, cioè l'altezza dovuta alla celerità per ogni punto è la distanza di questo dal livello. Nell'inferiore poi per ogni punto della luce, l'altezza dovuta alla celerità delle molecole che vi passano è costante, ed è l'altezza della parte libera della luce.

77. **Velocità delle molecole nella parte soggetta a rigurgito.** Infatti si consideri nella luce un punto ove essa è soggetta a rigurgito: le molecole che passano per questo punto sentono una resistenza o pressione dal fluido stagnante: questa pressione come si sà è uguale alla distanza del punto dal livello della detta acqua stagnante.

Si vada ora alla formola generale (*a.* § 40) del moto lineare, si supponga in questa il moto permanente, ed allora sparirà il termine

$$\frac{f dc}{g dt}\int\frac{dl}{y}.$$

Se ora nel punto in proposito si considera una superficieola infinitesima della molecola che vi passa per questa la frazione $\frac{f^2}{m^2}$ svanirà, e quindi il secondo membro della detta

equazione si ridurrà a $\frac{c^2}{2g}$. Nel primo membro la differenza A—B, è differenza di rette l'una esprimente la pressione al livello, l'altra esprimente la pressione alla luce. Se si ritenga che A, e B esprimano le pressioni uguali dell'aria atmosferica si vede chiaro, che la B pressione dell'aria alla molecola poco fa considerata si dovrà crescere della pressione d: dunque nel caso nostro il binomio A — B sarà A—A—d, o —d. Nel primo membro dell'equazione che consideriamo altre il binomio A—B, vi è l'altro $k-h$, che è la distanza della luce dal livello, esprimendola dunque per D il primo membro si ridurrà a D—d, che è l'altezza della parte libera della luce: questa è uguale a $\frac{c^2}{2g}$ cioè all' altezza dovuta alla celerità della molecola considerata: dunque è dimostrato il teorema, cioè, *che tutte le molecole escono dalla parte della luce soggetta a rigurgito con una stessa celerità dovuta all'altezza che è l'altezza della parte libera della detta luce.*

78. **Applicazione del teorema ai vasi inesausti.** Sia una luce trapezia come nel (§ 78) sia h l'altezza della parte libera, e k l'altezza di quella soggetta a rigurgito. Abbiamo per la formola della portata

$$Q=\frac{4}{15}\,a\sqrt{2ga}-(3q+2p).$$

Nella parte libera la a è h, e q la ordinata corrispondente all'ascissa h. Ora abbiamo

$$y=\left(\frac{q-p}{a}\right)\,x+p$$

dunque in luogo di q porremo

$$\left(\frac{q-p}{a}\right)\,h+p:$$

perciò la portata nella parte libera in una unità di tempo sarà

$$Q=\frac{4}{15}\,h\sqrt{2gh}\left[3\left(\frac{q-p}{a}\right)h+5p\right].$$

Per la parte soggetta al rigurgito abbiamo un trapezio le di cui basi sono

$$2\left(\frac{q-p}{a}\right)h+2p,$$

e $2q$, l'altezza è k dunque l'area sarà

$$\left[\left(\frac{q-p}{a}\right)h+p+q\right]k$$

questa deve essere moltiplicata per la velocità costante $\sqrt{2gk}$: dunque la portata in una unità di tempo sarà

$$\left[\left(\frac{q-p}{a}\right)h+p+q\right]k\sqrt{2gh}$$

79. **Vaso che si vuota**. Supponendo come innanzi la luce trapezia in un vaso che si vuoti, e questo di sezione costante M otterremo

$$dQ=\frac{4}{15}\,x\sqrt{2gx}\,\left(5h\cot.i+5p-2x\cot.i\right)dt$$

$$+dt\left(h\cot.i+p+q\right)k\sqrt{2gx}$$

che uguagliata alla falda Mdx, e separate le variabili ci darà

$$-\frac{dt}{M}=dx:\left[\frac{4}{15}x\sqrt{2gx}\left(5h\cot.i+5p-2x\cot.i\right)\right.$$

$$\left.+k\left(h\cot.i+p+q\right)\sqrt{2gx}\right]$$

Se si ponga $x=z^2$

Si troverà doversi integrare una espressione della forma

$$\frac{dz}{mz^4+nz^2+r}$$

Di cui il denominatore essendo espressione derivativa di secondo grado facilmente se ne possono determinare i fattori, e quindi si può procedere allo spezzamento della frazione per l'integrazione.

80. **Emissario rettangolo**. Si supponga la luce rettangola di base b, e di altezza a. In questa ipotesi nell'equazione antecedente si dovrà fare $\cot.i=0$, $2q=2p=b$ con questo diventerà

$$-\frac{b\,dt}{M}=\frac{dx}{\frac{2}{3}x\sqrt{2gx}+k\sqrt{2gx}}$$

Per integrarla si ponga $\sqrt{2gx}=z$ ed essa diventerà

$$-\frac{b\,dt}{3M}=\frac{dz}{3gk+z^2}.$$

Integrando così che quando $t=0$ sia $z=\sqrt{2gh}$ avremo

$$\frac{bt\sqrt{3gk}}{3M}=\text{arc.tang.}\left(=\sqrt{\frac{2h}{3k}}\right)-\text{arc.tang.}\left(=\sqrt{\frac{2x}{3k}}\right)$$

da questa si ha

$$x=\frac{3k}{2}\left\{\frac{2h-3k\,\text{tang.}\,\frac{bt\sqrt{3gk}}{M}}{3k-2h\,\text{tang.}\,\frac{bt\sqrt{3gk}}{M}}\right\}^2$$

Avendosi $q=M(a-x)=M(h+k-x)$ se invece di x si ponga il valore antecedente si avrà la formola della portata data in tempo.

CAPO XIII.

Moto dell'acqua nei vasi discontinui.

81. **Definizione del vaso discontinuo.** Vaso discontinuo si dice quello nel quale in tutta l'estenzione la sezione non è la stessa funzione dell'ascissa, sia questa presa nella direttrice, sia presa nella verticale.

82. **Equazione del moto nei vasi discontinui.** Per avere la formola del moto in cotali vasi conviene partirli nei recipienti continui, che li compongono, applicare a ciascuno di essi l'equazione (*a*. § 40), e poi sommare l'equazioni provenienti.

Si supponga il vaso discontinuo composto di tre continui. Siano a, a' a'' le altezze verticali dei tre tronchi; m, n, q le loro sezioni superiori; f, r, e le sezioni inferiori. Si A la pressione al livello m; H la pressione reciproca nelle due sezioni a contatto f, n; K la pressione reciproca nelle due sezioni r, q; e B la pressione alla luce e; gl'integrali definiti di $\frac{dl}{y}$ nei tre tronchi siano S, S', S'', e c sia la velocità alla luce e.

83. Posto ciò l'equazione (*a*. § 40) espressa in proposizione ci dà, che in *un tronco qualunque continuo la differenza della pressione superiore ed inferiore più l'altezza verticale del tronco è uguale all'integrale definito di* $\frac{\mathrm{dl}}{\mathrm{y}}$ *moltiplicato per la sezione inferiore moltiplicata per il differenziale delle celerità a questa sezione diviso il prodotto per* gdt, *più in ultimo l'altezza dovuta alla celerità nella sezione inferiore moltiplicata per l' unità diminuita del quadrato della sezione inferiore diviso pel quadrato della sezione superiore.* Abbiamo poi che l' equazione (§ 25) $u = \frac{fc}{y}$ ci dice che *la celerità*

ad una sezione qualunque si ottiene dal prodotto della celerità in una determinata sezione nella sezione stessa diviso per la sezione nella quale si vuol determinare la celerità.

Ora abbiamo posto che c sia la celerità alla sezione e inferiore del terzo tronco, dunque saranno

$$\frac{ec}{f}, \frac{ec}{r}$$

le celerità alle sezione inferiori del primo, e del secondo tronco.

84. Applichiamo ora la prima proposizione del (§83) al primo tronco. La differenza delle pressioni è A—H, l'altezza del tronco è a, dunque $A-H+a$ sarà il primo membro dell'equazione. La S esprime l'integrale definito di $\frac{dl}{y}$ nel primo tronco, questo deve essere moltiplicato pel differenziale della celerità alla sezione inferiore moltiplicato per la stessa sezione; dunque S sarà moltiplicato per $\frac{fedc}{f}$, o per edc, prodotto che deve essere diviso per gdt, dunque il primo termine del secondo membro dell'equazione che si cerca sarà $\frac{Sedc}{gdt}$. Il secondo termine deve essere l'altezza dovuta alla celerità della sezione inferiore cioè $\frac{e^2c^2}{2gf^2}$ moltiplicata per l'unità diminuita del quadrato della sezione inferiore diviso pel quadrato della sezione superiore dunque l'indicato termine sarà

$$\frac{e^2c^2}{2gf^2}\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right),$$

ovvero

$$\frac{e^2c^2}{2g}\left(\frac{1}{f^2}-\frac{1}{m^2}\right):$$

dopo ciò l'equazione pel primo tronco sarà

$$A-H+a=\frac{Sedc}{gdt}+\frac{e^2c^2}{2g}\left(\frac{1}{f^2}-\frac{1}{m^2}\right)$$

operando allo stesso modo per gli altri due tronchi avremo

$$H-K+a'=\frac{S'edc}{gdt}+\frac{e^2c^2}{2g}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$K-B+a''=\frac{S''edc}{gdt}+\frac{e^2c^2}{2g}\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{q^2}\right).$$

Sommando le tre equazioni avute ed esprimendo con a l'altezza verticale del vaso discontinuo avremo

$$(a)\qquad A-B+a=\frac{edc}{gdt}(S+S'+S'')$$

$$+\frac{e^2c^2}{2g}\left(\frac{1}{f^2}-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{e^2}-\frac{1}{q^2}\right)$$

85. **Equazione del moto permanente nei vasi discontinui.** Quando il moto si fa permanente il c è costante e $dc=0$, ammettendo ciò nell' equazione antecedente e facendo uguali le pressioni A , B dell' aria atmosferica avremo

$$\frac{c^2}{2g}=\frac{a}{e^2\left(\frac{1}{f^2}-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{q^2}\right)}$$

se le luci sono piccolissime sarà

$$\frac{c^2}{2g}=\frac{a}{1+\frac{e^2}{f^2}+\frac{e^2}{r^2}}$$

e se e è piccolissima rispetto le altre sarà $\frac{c^2}{2g}=a$.

86. **S'introduce la forza d'afflusso nell'equazione antecedente.** Nel caso antecedente non si è avuto riguardo all'effetto dell'afflusso che ha luogo nel passaggio del fluido

da vaso a vaso. Nel (§ 46) abbiamo trovato per l'espressione della forza dell'afflusso $(k-1)\ \frac{f^2c^2}{gm^2}$, dove il k è il quoto della velocità dell' acqua affluente, divisa per la velocità dell' acqua che incontra: e $\frac{f^2c^2}{gm^2}$ è due volte l'altezza dovuta alla celerità dell'acqua incontrata, o dell'acqua sulla quale si fà l'afflusso: Si è veduto poi che la detta quantità si doveva aggiungere al primo membro dell'equazione ((*a*) § 40) del moto lineare in un vaso continuo. Ora andando all' afflusso prodotto dall' ingresso dell' acqua dal primo vaso nel secondo si vedrà, che la velocità dell'acqua nella seziono f, o dell' acqua affluente è $\frac{ec}{f}$, e la velocità della sezione n sulla quale si fa l'afflusso è $\frac{ec}{n}$: dunque

$$k = \frac{ec}{f} : \frac{ec}{n} = \frac{n}{f}:$$

così il k per l'afflusso del secondo vaso nel terzo sarà

$$k = \frac{ec}{r} : \frac{ec}{q} = \frac{q}{r}.$$

Il doppio dell'altezza dovuta alla celerità della sezione n sulla quale si fà l'afflusso è $\frac{e^2c^2}{gn^2}$, ed il doppio della altezza della celerità della sezione q sulla quale nel terzo vaso si fa l'afflusso dell'acqua che esce dal secondo è $\frac{e^2c^2}{gq^2}$: dunque le forze dell'afflusso sono

$$\left(\frac{n}{f}-1\right)\frac{e^2c^2}{gn^2},\ \left(\frac{q}{r}-1\right)\frac{e^2c^2}{gq^2}.$$

Queste quantità vanno aggiunte separatamente ai primi membri della seconda e terza delle equazioni (§ 84) o insieme al primo membro dell'equazione risultante (*a.* § 84). Facendo questa aggiunta supponendo il moto permanente ed A=B avremo

$$a + \left(\frac{n}{f} - 1\right)\frac{e^2c^2}{gn^2} + \left(\frac{q}{r} - 1\right)\frac{e^2c^2}{gq^2}$$

$$= \frac{e^2c^2}{2g}\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{q^2}\right)$$

ossia

$$a = \frac{e^2c^2}{2g}\left[\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{2n}{f} - 2\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2}\left(\frac{2q}{r} - 2\right)\right]$$

ed

$$a = \frac{e^2c^2}{2g}\left[\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{2n}{f} - 1\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{q^2}\left(\frac{2q}{r} - 1\right)\right]$$

dalla quale (*b*) $\frac{c^2}{2g} =$

$$\frac{a}{e^2\left[\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{2n}{f} - 1\right) + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{q^2}\left(\frac{2q}{r} - 1\right)\right]}$$

Osservando la formola (*a*) (§ 85), si vede, che *l'altezza dovuta alla celerità nella luce del vaso discontinuo è uguale alla sua altezza divisa pel quadrato della luce, e divisa per la somma di tante differenze quanti sono i tronchi che compongono il vaso discontinuo, ed ogni differenza è l'unità divisa pel quadrato della sezione inferiore diminuita dell'unità divisa pel quadrato della sezione superiore dello stesso tronco.*

Se si voglia poi considerare l'azione dell' afflusso dell'acqua uscendo da un vaso ed entrando nell'altro, *l'unità divisa pel quadrato della sezione superiore del vaso sulla quale accade l'afflusso deve moltiplicarsi per due volte questa sezione divisa per la sezione inferiore del vaso antecedente da cui viene l'afflusso e questo quoto diminuirsi dell'unità.*

Così abbiamo

$$-\frac{1}{n^2}\left(\frac{2n}{f}-1\right)$$

dove l'unità divisa pel quadrato di n sezione superiore del secondo vaso viene moltiplicata per $2n$ divisa per f sezione inferiore del vaso antecedente.

· 87. **Vasi interrotti da diaframmi.** Dopo ciò si supponga un vaso reso discontinuo da diaframmi, il cui livello costante amplissimo sia M. Li piani dei diaframmi siano m, n, q, nei quali i fori ai detti piani siano in ragione di i ad 1, di k ad 1, di h ad 1: saranno im, kn, hq le grandezze dei detti fori. Sia c la celerità alla luce f di sbocco.

Applicando la formola (b) (§ 86) avremo $\frac{c^2}{2g}$ =

$$\frac{a}{f^2}:\left[\frac{1}{i^2m^2}-\frac{1}{M^2}+\frac{1}{k^2n^2}-\frac{1}{m^2}\left(\frac{2m}{im}-1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h^2q^2}-\frac{1}{n^2}\left(\frac{2n}{kn}-1\right)+\frac{1}{f^2}-\frac{1}{q^2}\left(\frac{2n}{hq}-1\right)\right]=$$
$$a:\left[1+\frac{f^2}{m^2}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{2}{i}+1\right)+\frac{f^2}{n^2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{2}{k}+1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{f^2}{q^2}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{2}{h}+1\right)\right]=a:\left[1+\frac{f^2}{m^2}\left(\frac{1}{i}-1\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{f^2}{n^2}\left(\frac{1}{k}-1\right)^2+\frac{f^2}{q^2}\left(\frac{1}{h}-1\right)^2\right].$$

dalla quale si vede il processo della formola per un numero qualunque di diaframmi.

CAPO XIV.

Dei vasi comunicanti.

88. **Primo caso.** Da un vaso inesausto prismatico verticale per un piccolo foro entri acqua in un altro vaso pure prismatico verticale forato di piccola luce: si domanda l'altezza dell'acqua in questo vaso quando tanta ne esce dal primo e tanta dal secondo.

Si dica A l'altezza dell'acqua del primo vaso, ed F il suo foro: sia f il foro nel secondo vaso, ed x l'altezza dell'acqua domandata. È evidente che in una unità di tempo esce dal primo vaso acqua espressa da $F\sqrt{2gA}$, e dal secondo $f\sqrt{2gx}$: queste due quantità debbono essere uguali: per la condizione del problema: dunque $f\sqrt{2gx}=F\sqrt{2gA}$, ed $x=\frac{F^2A}{f^2}$: e questa sarà l'altezza permanente del livello nel secondo vaso quando tanta acqua uscirà dal primo quanta dal secondo vaso. L'equazione antecedente dandoci $xf^2=AF^2$ ci dice, che le due altezze di livello nello stato permanente sono in ragione inversa dei quadrati delle luci.

Se variasse l'altezza del livello nel primo vaso e diventasse A', varierà l'altezza del livello nel secondo si dica x', ed avremo $x'f^2=A'F^2$ sottraendo da questa l'antecedente equazione avremo $(x'-x)f^2=(A'-A)F^2$, cioè le differenze d'altezze dei due livelli sono in ragione inversa dei quadrati delle luci.

89. *Si domandi ora il tempo dell'elevazione del livello nel secondo vaso.* Si esprima con m l'effetto della contrazione della vena; l'espressione $mFdt\sqrt{2gA}-mfdt\sqrt{2gx}$ esprimerà l'acqua, che rimarrà in un tempo dt nel secondo vaso per l'uscita

dal secondo. Se si dica S la sezione orizzontale costante del secondo vaso la detta quantità d'acqua sarà uguale alla falda fluida Sdx sollevata nel secondo vaso: dunque

$$mFdt\sqrt{2gA}-mfdt\sqrt{2gx}=Sdx,$$

dalla quale

$$dt=\frac{S}{m\sqrt{2g}}\cdot\frac{dx}{F\sqrt{A}-f\sqrt{x}}\,.$$

Per integrare questa espressione si faccia $x=z^2$ avremo

$$dt=\frac{2S}{m\sqrt{2g}}\cdot\frac{zdz}{F\sqrt{A}-fz}\,.$$

Nell'espressione

$$\frac{z}{F\sqrt{A}-fz}$$

si eseguisca la divisione, e così spezzerà in due parti l'una intera, e l'altra fratta: si moltiplichi il risultamento per dz e si avranno due differenziali d'immediata integrazione quindi otterremo

$$t=\frac{2S}{mf^2\sqrt{2g}}\left[-f\sqrt{x}-F\sqrt{A}\,l\left(F\sqrt{A}-f\sqrt{x}\right)\right]+C$$

Si determini la costante per mezzo della condizione $t=0$, $x=0$ ed avremo

$$t=-\frac{2S}{mf^2\sqrt{2g}}\left[f\sqrt{x}+F\sqrt{A}\,l\,\frac{F\sqrt{A}-f\sqrt{x}}{F\sqrt{A}}\right]:$$

90. Si dica Q la quantità d'acqua che dal primo vaso in una unità di tempo entra uniformemente nel secondo senza produrre forza d'afflusso, si supponga che nel secondo vaso a fior d'acqua sia praticato un emissario rettangolare di larghezza b e di altezza variabile x; si domanda l'altezza x quando tant' acqua Q entra nel secondo vaso, e tanta ne esce.

La portata dell'emissario in una unità di tempo non ammettendovi la contrazione della vena si ottiene dal (§ 72) facendovi $\cot.i=0$

$$\frac{2}{3}\, mbx\sqrt{2gx},$$

che si deve uguagliare a Q. Il valore, che si ricaverà dall'equazione è

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{9Q^2}{8m^2b^2g}\right)},$$

che sarà l'altezza permanente del livello nel secondo vaso.

Si domandi il tempo dell'elevazione del livello nel secondo vaso: avremo

$$\left(Q-\frac{2}{3}\, mbx\sqrt{2gx}\,\right) dt=Sdx$$

Se si ponga $x=z^2$ si dovrà integrare

$$\frac{tzdz}{3Q-2mb\sqrt{2g}.z^3},$$

i di cui fattori del denominatore reale, e coniugati immaginarii facilmente si possono trovare per lo spezzamento della frazione.

91. **Secondo caso.** Siano i due vasi a contatto, e dal primo per un foro piccolo f entri acqua nel secondo. Le sezioni dei due vasi siano s e s': al principio del tempo siano a, a' le altezze dei livelli nei due recipienti, e dopo un tempo t siano x, y, talchè $x-y$ sia l'elevazione del livello del primo vaso sopra quello del secondo.

La luce del primo vaso si trova al di sotto di y del livello del secondo vaso, e di x al di sotto del livello del primo: quindi l'altezza dovuta alla celerità dell'acqua che vi esce (§ 77) è $x-y$: dunque la portata di detta luce in in un tempo dt sarà $fdt\sqrt{2g(x-y)}$, questa è ugualo alla

falda $s\mathrm{d}x$ che si abbassa nel primo vaso, ed alla falda $s'\mathrm{d}y$ che s'inalza nel secondo nel tempo $\mathrm{d}t$: perciò avremo l'equazioni

$$f\mathrm{d}t\sqrt{2g(x-y)} = -s\mathrm{d}x,\ f\mathrm{d}t\sqrt{2g(x-y)} = s'\mathrm{d}y:$$

dalle quali abbiamo $-s\mathrm{d}x = s'\mathrm{d}y$, o $s\mathrm{d}x + s'\mathrm{d}y = 0$. Integrandola abbiamo $sx + s'y = c$, ove c è la costante arbitraria. Ma al principio del moto $x = a$, $y = a'$ dunque $sa + s'a' = c$, quindi avremo $sx + s'y = sa + s'a'$: da queste abbiamo

$$y = \frac{sa + s'a' - sx.}{S'}$$

Si ponga

$$\frac{sa + s'a'}{s'} = m\,,\ \frac{s}{s'} = n$$

ed avremo $y = m - nx$. Si sostituisca questo valore di y nell'equazione

$$f\mathrm{d}t\sqrt{2g(x-y)} = -s\mathrm{d}x$$

ed avremo

$$\mathrm{d}t = -\frac{s}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{[-m + (n+1)x]}}\,.$$

Integrando abbiamo

$$t = -\frac{2s}{f(n+i)\sqrt{2g}}\sqrt{[-m + (n+1)x]} + C$$

quando $t = 0$ $x = a$: quindi

$$t = \frac{2s}{f(n+1)\sqrt{2g}}[\sqrt{[-m + (n+1)a]} - \sqrt{[-m + (n+1)x]}]$$

ossia sostituendo i valori di m, ed n si avrà

$$t = \frac{2ss'}{f(s+s')\sqrt{2g}}\Big[\sqrt{(a-a')} + \sqrt{\Big[-\frac{sa + s'a'}{S'} + \frac{(s+s')}{S'}x}\Big]$$

Se si vuole il tempo nel quale l'acqua nei due vasi si compone allo stesso livello deve farsi $x=y$ lo che nell' equazione

$$sx+s'y=sa+s'a'$$

ci dà

$$x=\frac{sa+s'a'}{s+s'}$$

che sostituito nell'antecedente equazione ci darà pel tempo domandato

$$(a) \qquad t=\frac{2ss'\sqrt{(a-a')}}{(s+s')f\sqrt{2g}}$$

Se il primo vaso è inesausto sarà $dx=0$ perchè non vi accade cambiamento d'altezza nel cambiamento del tempo, onde avremo la sola equazione

$$dt=\frac{s'}{f\sqrt{2g}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(a-y)}},$$

che integrata ci dà

$$t=-\frac{2s'}{f\sqrt{2g}}\sqrt{(a-y)}+c\ ;$$

determinata la costante per l'ipotesi di $y=a'$ quando $t=0$ avremo

$$t=\frac{2s'}{f\sqrt{2g}}[\sqrt{(a-a')}-\sqrt{(a-y)}]\ ;$$

e pel tempo in cui i due livelli si pareggiano in cui $y=a$ sarà

$$t=\frac{2s'}{f\sqrt{2g}}\sqrt{(a-a')}\ ;$$

si sarebbe avuto lo stesso risultamento se nell' equazione (a) si fosse fatto s sezione del vaso inesausto maggiore d'ogni assegnabile, perchè rispetto questa sarebbe sparita

la s' aggiunta : e veramente una sezione tale in detto vaso equivale a supporlo inesausto.

Si supponga il primo vaso inesausto e che il secondo lasci uscire acqua da un foro piccolo ω posto allo stesso livello di f: avremo che la quantità d'acqua che si accresce al secondo vaso nel tempo dt sarà

$$fdt\sqrt{2g(a-y)} - \omega dt\sqrt{2gy}$$

che dovendo essere uguale alla falda infinitesima $s'dy$ di che cresce l'acqua del secondo vaso nel tempo dt avremo

$$dt = \frac{s'}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dy}{f\sqrt{(a-y)}-\omega\sqrt{y}}\,.$$

Si faccia $y=z^2$ ed avremo da integrare

$$\frac{zdz}{f\sqrt{(a-z^2)}-\omega z}\,.$$

Si ponga

$$\sqrt{(a-z^2)}=\sqrt{(\sqrt{a}-z)(\sqrt{a}+z)}=(\sqrt{a}+z)u$$

Per questa sostituzione troveremo che la trasformata del differenziale antecedente è

$$\frac{-4(1-u^2)udu\sqrt{a}}{(1+u^2)^2(2fu-\omega+\omega u^2)}$$

espressione nella quale si può eseguire lo spezzamento in fattori ripetuti di secondo grado per gl'immaginarii, ed in fattori reali semplici nell' espressione di secondo grado $2fu-\omega+\omega u^2$ sempre decomponibili in questi, essendo f ed ω di natura positivi. Determinata coll'integrale l'equazione fra t ed y si potrà avere il tempo nel quale il livello del vaso inferiore si pareggierà col livello del superiore, che è all'altezza a. Il valore di y a ciò acconcio si avrà se nell'equazione

$$fdt\sqrt{2g(a-y)}-wdt\sqrt{2gy}=s'dy$$

si farà $dy=0$ che esprime la permanenza di livello, che ha luogo solo quando i due livelli siano uno solo. Da questa ipotesi ricaveremo il valore richiesto $y=\frac{af^2}{f^2+w^2}$. (*)

92. **Terzo caso.** Siano due vasi prismatici verticali di diverse ampiezze, quello di minore ampiezza abbia una luce al fondo, e sia verticalmente ed immobilmente sospeso dentro l'altro. Siano a, b le altezze dei livelli dell'acqua, al principio del tempo nel vaso di minore, e maggior ampiezza sopra il fondo del primo e sia a maggiore di b mentre che dopo un tempo t queste elevazioni siano x, y. Sia A la pressione al livello del primo vaso, e B la pressione al livello

---

(*) Per la superiore integrazione, e per analoghe serve la formola dell' integrazione di $\frac{du}{(a+bu^2)^n}$, che viene nello spezzamento delle frazioni pel caso dei fattori immaginarii coniugati ripetuti, che è l'unico caso per cui si richiede metodo d'integrazione. Infatti gli altri casi espressi da

$$\frac{du}{a+bu},\ \frac{du}{(a+bu)^n},\ \frac{du}{a+bu+cu^2},\ \frac{udu}{(a+bu^2)^n}$$

sono immediatamente integrabili. Per applicare l'integrazione per parti al proposto differenziale $\frac{du}{(a+bu^2)^n}$ si trasformi in $\frac{(a+bu^2-bu^2)du}{(a+bu^2)^n}$, o in

$$\frac{du}{(a+bu^2)^{n-1}}-\frac{bu^2du}{(a+bu^2)^n}:$$

dunque avremo

$$\int\frac{du}{(a+bu^2)^n}=\int\frac{du}{(a+bu^2)^{n-1}}-\int\frac{bu^2du}{(a+bu^2)^n}.$$

dell'altro. Sia H la pressione reciproca nella luce del primo vaso e la sezione del secondo. Siano m, ed n le sezioni orizzontali dei due vasi, c la celerità della sezione m, ed f la luce già detta.

Dopo ciò saranno $\frac{mc}{f}$, $\frac{mc}{n}$ la velocità alla luce, ed alle sezione n del secondo recipiente. Siamo nel caso d'un vaso discontinuo composto di due continui.

Prima d'applicare l'equazione (a. § 40) a questi due vasi teniamo proposito della differenza $k-h$ di questa equazione Nella dimostrazione dell'indicata equazione il k da un punto alto va alla sezione estrema verso la quale si fa il moto, e la h che parte dallo stesso punto va alla sezione suprema dalla quale parte il moto. Stabilita questa direzione di k, ed h avremo evidentemente pel primo vaso, servendoci della prima proposizione del (§ 83)

$$(a) \qquad \mathrm{A}-\mathrm{H}+x=\frac{xdc}{gdt}+\frac{c^2}{2g}\left(\frac{m^2}{f^2}-1\right).$$

Applicando il metodo dell'integrazione per parti sul $\frac{bu^2du}{(a+bu^2)}$ avremo

$$\int\frac{bu^2du}{(a+bu^2)^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{u}{(a+bu^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{du}{(a+bu^2)_{n-1}}\ ;$$

sostituendo avremo

$$\int\frac{du}{(a+bu^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{u}{(a+bu^2)^{n-1}}$$
$$+\int\frac{du}{(a+bu^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{du}{(a+bu^2)^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{u}{(a+bu^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}\int\frac{du}{(a+bu^2)^{n-1}}\ .$$

Per questa equazione si fà diminuire d'una unità l'esponente del denominatore: quindi in ultimo l'integrale proposto dipenderà da $\frac{du}{a+bu^2}$, che subito s'integra.

Infatti la celerità alla sezione infima del primo vaso è $\frac{mc}{f}$: quindi il suo differenziale è $\frac{mdc}{f}$: questo deve essere moltiplicato per la stessa sezione f:dunque avremo mdc. Abbiamo trovato (§ 57) che l'integrale definito di $\frac{dl}{y}$ è $\frac{x}{m}$: quindi moltiplicando per questo il valore antecedente mdx avremo xdc, che deve essere diviso per gdt, onde avere il primo termine del secondo membro nella nostra equazione, ove abbiamo appunto $\frac{xdc}{gdt}$. L'altezza dovuta alla celerità $\frac{mc}{f}$ della sezione infima f è $\frac{m^2c^2}{2gf^2}$: questa deve essere moltiplicata per $1-\frac{f^2}{m^2}$, fatto ciò abbiamo

$$\frac{c^2}{2g}\left(\frac{m^2}{f^2}-1\right)$$

che è il secondo termine della divisata equazione.

Andiamo al moto nel secondo vaso. Questo è ascendente dalla sezione a livello col foro f verso la sezione n superiore del vaso in proposito. Per questo moto abbiamo l'equazione

$$(b)\quad H-B-y=\frac{mydc}{gndt}.$$

La differenza $H-B$ è la differenza fra la pressione alla sezione dalla quale parte il moto, e la pressione sulla sezione n verso la quale si dirige il moto. Nel nostro caso k è l'ascissa, che da un punto superiore ai recipienti va alla sezione suprema n del liquido verso cui si fa il moto, ed h è l'ascissa che dal detto punto va alla sezione inferiore in livello con f, dalla quale parte il moto; quindi la differenza $k-h$, che è l'altezza del fluido, sarà negativa, e perciò invece di

quella differenza, si dovrà porre $-y$. La celerità alla sezione verso la quale si fa il moto è la celerità della sezione suprema n: dunque questa celerità sarà $\frac{mc}{n}$, ed il suo differenziale sarà $\frac{mdc}{n}$: questa deve essere moltiplicata per la sezione stessa n : dunque diventerà mdc. Questo risultamento deve essere moltiplicato per l'integrale definito di $\frac{dl}{y}$ appartenente al secondo vaso che è $\frac{y}{n}$: avremo dunque $\frac{mydc}{n}$, che diviso per gdt ci darà il primo termine $\frac{mydc}{gndt}$ del secondo membro della superiore equazione. Poi ci dovrebbe essere per secondo termine l'altezza dovuta alla celerità dalla sezione n verso la quale si fà il moto, cioè $\frac{m^2c^2}{2gn^2}$ moltiplicata per l'unità diminuita del quadrato della sezione n verso cui si fà il moto, diviso pel quadrato della sezione n da cui parte il moto; questo moltiplicatore di $\frac{m^2c^2}{2gn^2}$ è zero, dunque quel secondo termine non esiste. Sommando le due trovate equazioni (a) (b) col supporre $A=B$ avremo

$$(c) \qquad x-y=\frac{dc}{gdt}\left(x+\frac{my}{n}\right)+\frac{c^2}{2g}\left(\frac{m^2}{f^2}-1\right)$$

La $mcdt$ è una falda fluida che scorre nel tempo dt nel vaso superiore: dunque sarà uguale a $-mdx$ falda che in esso si abbassa nello stesso tempo, ed uguale ancora alla falda ndy che in pari tempo s'innalza nel secondo vaso: dunque si avrà

$$mcdt=-mdx=ndy:$$

di qui abbiamo $dt = -\frac{dx}{c}$. Si ponga $\frac{c^2}{2g} = v$, d'onde $\frac{cdc}{g} = dv$, ovvero $\frac{dc}{g} = \frac{dv}{c}$, e dividendo questa per l'equazione antecedente $dt = -\frac{dx}{c}$ sarà $\frac{dc}{gdt} = -\frac{dv}{dx}$. Sostituendo questo valore di $\frac{dc}{gdt}$, e quello di $\frac{c^2}{2g} = v$ nell' equazione (c) avremo

$$(d) \quad x - y = -\frac{dv}{dx}\left(x + \frac{my}{n}\right) + v\left(\frac{m^2}{f^2} - 1\right).$$

Per eliminare una delle variabili x, y abbiamo l'equazione $mdx + ndy = 0$, che integrata ci dà come sopra (§ 91)

$$mx + ny = ma + nb.$$

Sostituendo il valore di x ricavato da questa nell'equazione antecedente (d) avremo una equazione della forma

$$(e) \quad (px + qv + r)dx + (p'x + r')dv = 0.$$

Per rendere omogenei i coefficienti di dx, e dv in questa equazione, ossia per far sì che le variabili nei singoli termini di detti coefficienti non formino che uno stesso esponente si faccia

$$px + qv + r = z, \quad p'x + r' = u:$$

ed avremo

$$pdx + qdv = dz \quad p'dx = du.$$

Sostituito il valore di $dx = \frac{du}{p'}$ nell'antecedente equazione avremo $dv = \frac{dz}{q} - \frac{pdu}{qp'}$ sostituiti questi valori nella (e) avremo una equazione della forma

$$(p''z + q''u)du + r''udz = 0$$

equazione differenziale omogenea; per la separazione delle variabili si ponga $z=ut$. Fatta la sostituzione essa diverrà della forma

$$(p'''+q'''t)\mathrm{d}u+r'''u\mathrm{d}t=0$$

che si riduce a

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{r'''\mathrm{d}t}{p'''+q'''t}=0$$

equazione immediatamente integrabile.

Integrata così l'equazione (e) si avrà la v in x: ma abbiamo

$$\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}x}{c}=-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2gv}}:$$

ove posto il valore di v in x si potrà avere la t in x, e quindi si avranno due equazioni nelle quali la t, e la c sono date in x. Se il vaso inferiore è molto ampio potrà farsi il livello di costante altezza : onde $y=b$. In questa ipotesi la (d) diventa

$$(f)\qquad x-b=-\frac{x\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\left(\frac{m^2}{f^2}-1\right)$$

perchè sparisce la $\frac{my}{n}$ a causa della n grandissima. Questa equazione per l'integrazione si tratta come la (e). Se di più la luce f sia piccolissima rispetto la sezione m del vaso superiore sarà $\frac{m^2}{f^2}$ grandissima, e perciò nell'antecedente equazione nel secondo membro rimarrà il solo grandissimo termine $\frac{m^2v}{f^2}$: dunque avremo $\frac{m^2v}{f^2}=x-b$, ossia $\frac{m^2c^2}{2gf^2}=x-b$: cioè l'altezza dovuta alla celerità della luce è la differenza dei due livelli; quindi il moto cesserà quando il livello del vaso superiore si pareggierà con quello dell'inferiore.

CAPO XV.

Moto in genere dell'acqua pei tubi.

93. Si supponga un tubo che imbocchi con un recipiente assai vasto mantenuto costantemente pieno di acqua, questo sistema potrà considerarsi come un recipiente, nel quale il fluido si muoverà con moto lineare, quindi si potranno applicare a questo le teorie antecedenti, che riguardano i vasi comunicanti.

94. Il sistema del vaso e del tubo darà un vaso continuo se questo imboccherà conformato in guisa da secondare la vena contratta; sarà discontinuo se ciò non avverrà, o se il tubo non sarà continuo, come sarebbe per esempio se fosse interrotto da diaframmi.

CAPO XVI.

Moto pei tubi continui.

95. **La velocità dell'acqua nell'uscire da questo tubo** sarà quella dovuta alla distanza verticale del livello dal centro della luce del tubo: ciò viene dal (§. 41), avvertendo che la luce è piccola relativamente alla ampiezza assai vasta del livello (§. 93).

96. **La pressione in una sezione qualunque del tubo** è rappresentata dalla differenza fra l'altezza del livello sulla sezione e l'altezza dovuta alla celerità in questa; tal differenza aggiunta alla pressione atmosferica sul livello (§. 30). Sia a l'altezza verticale del vaso, b quella del tubo, m la sezione all'origine del tubo, ed f quella dello sbocco. Sia di più y la sezione, nella quale si vuol la pressione,

e z la sua distanza verticale dalla imboccatura, avremo

$$fp = A + a + z - (a + b)\frac{f^2}{y^2}.$$

97. Da questa equazione si ricava a causa del segno negativo, che la pressiene può diventar negativa, ed essendo positiva può essere minore della pressione atmosferica.

98. **Quando la pressione si fa negativa** in quella sezione le molecole abbandonano la parete del tubo stringendo la sezione, ed in questa il tubo si fa discontinuo.

99. **Affinchè la pressione non diventi negativa all'imboccatura** dove $z = 0$ ed $y = m$ deve essere

$$a + b < (A + a)\frac{m^2}{f^2}.$$

Qui se il tubo è cilindrico essendo $m = f$ sarà

$$a + b < A + a \;, \quad \text{o} \quad b < A \;,$$

quindi la sua altezza non può eccedere metri 10, colonna barometrica, senza che la pressione si farà negativa. Un tubo convergente ove $\frac{m^2}{f^2}$ è frazione spuria comporta altezza maggiore, ed in un tubo divergente, per cui $\frac{m^2}{f^2}$ è vera frazione non può giungere a quella altezza.

100. **Se il tubo giace orizzontale** sarà $b = 0$, ed avremo la condizione

$$a < (A + a)\frac{m^2}{f^2}:$$

quindi se il tubo è cilindrico o convergente, questa condizione si verificherà sempre a qualunque estenzione del tubo: ma se sarà divergente impiccolendosi la frazione $\frac{m^2}{f^2}$ sempre più che si allunga il tubo, l'inuguaglianza non

sussisterà sempre, e perchè sussista potrà allungarsi finchè si mantenga $\frac{m^2}{f^2} > \frac{a}{A + a}$.

101. Se tale sarà la struttura del tubo, che in una sezione la pressione sia positiva, ma minore della pressione atmosferica, allora praticata in questa sezione una apertura alla parete non solo non ne uscirà stilla d'acqua, ma l'aria premendo con forza prevalente s' introdurrà nel tubo, e framischiandosi coll'acqua ne romperà la continuità.

102. Affinchè all' imboccatura del tubo la pressione atmosferica non sia maggiore di quella del fluido dovrà essere

$$a + b < \frac{am^2}{f^2}:$$

quindi nell' imboccatura dei tubi inclinati al basso e cilindrici non potendo essere $a + b < a$ prevarrà sempre la pressione atmosferica, lo che avverrà molto più nei tubi divergenti. Nei convergenti non sempre, potendo essere che la frazione spuria $\frac{m^2}{f^2}$ cresca tanto da fare sussistere la superiore inuguaglianza.

103. **Se il tubo è orizzontale** sarà

$$b = 0 \quad \text{e} \quad p = A + a - \frac{af^2}{m^2}.$$

Quì se il tubo è cilindrico avendosi $f = m$ sarà $p = A$, cioè per tutto la pressione del fluido sarà uguale all'atmosferica; sarà maggiore nei convergenti, e minore nei divergenti.

104. **Qualora si abbia discontinuo il tubo che imbocca col gran recipiente**, per la velocità dell'efflusso abbiamo l'equazione del (§. 87), nella quale si suppongono tre diaframmi che ristringono la sezione nelle ragioni di $1 : i$, $1 : k$, $1 : h$.

105. Vale la stessa equazione se il tubo invece di strozzature abbia protuberanze o varici, che dilatino le sezioni di 1 : i, di 1 : k ec.; e dalla stessa equazione si ricava come le varici arrechino discapito alle velocità, e si calcola detto discapito.

106. Dalla stessa equazione si ricava, come è indifferente per la velocità dell'efflusso il sito di codeste strozzature, o varici, e l' intervallo fra l' une e l' altre. Come anche riesca allo stesso o la strozzatura stringa, e la varice allarghi un cerchio solo del tubo, o si prolunghi per qualche tratto.

CAPO XVII.

Efflusso pei tubi addizionali.

107. Spesse volte dalle luci dei vasi si trae l'acqua per mezzo di tubetti cilindrici, conici, o di altra forma; ora è necessario conoscere quale alterazione producano queste aggiunte alla velocità ed alla portata dell'efflusso.

108. Ora può avvenire, che il tubo imbocchi col recipiente conformandosi alla contrazione della vena, ed in tal caso il recipiente ed il tubo formeranno un vaso continuo. Se il tubo non si conformerà alla vena contratta, avremo allora un vaso discontinuo, dove alla imboccatura si potrà supporre come un diaframma che restringa la vena nella ragione di 1 : 0,6. Consideriamo i due casi.

109. **Secondando il tubo la contrazione della vena** l'altezza dovuta alla velocità dell'efflusso sarà l'altezza totale verticale del recipiente e del tubo: cosicchè se le due altezze siano a, b avremo

$$\frac{c^2}{2g} = a + b .$$

110. **Quando il tubo non segua la contrazione della vena** avremo la formola (§ 87)

$$\frac{c^2}{2g}=\frac{a+b}{1+\frac{f^2}{m^2}\left(\frac{1}{i}-1\right)^2}$$

facendo in questa $i=0.6$ sarà

$$\frac{c^2}{2g}=\frac{a+b}{1+\frac{4f^2}{9m^2}}$$

111. **Sia il tubo cilindrico** ove $f=m$, sarà

$$\frac{c^2}{2g}=\frac{9}{13}(a+b)\ .$$

Si ridurrà $\frac{9}{13}$ a frazione continua, e sarà

$$\frac{1}{1+\frac{4}{9}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}},$$

e trascurando $\frac{1}{4}$ sarà prossimamente $\frac{9}{13}=\frac{2}{3}$ quindi

$$\frac{c^2}{2g}=\frac{2}{3}(a+b)\quad ,$$

onde la velocità dell'efflusso non è dovuta all'altezza $a+b$ ma a $\frac{2}{3}$ di questa.

CAPO XVIII.

Della portata dei tubi addizionali.

112. La portata della luce di un tubo che imbocca secondando la vena contratta è $Q = ft\sqrt{2g(a+b)}$. Para- Paragonando questa colla portata della nuda luce $mt\sqrt{2ga}$ si vedrà quali tubi accrescano, o scemino la portata.

113. Se il tubo è orizzontale le due portate saranno $ft\sqrt{2ga}$, $mt\sqrt{2ga}$, onde stà la portata della nuda luce a quella del tubo $= m : f$; quindi un tubo conico divergente aumenta la portata; un tubo cilindrico non l'altera, un conico convergente la diminuisce.

114. Quanto più si dilata la bocca del tubo divergente tanto più se ne trae di acqua. Non può però dilatarsi tanto, che $\frac{f^2}{m^2}$ superi $\frac{A+a}{a+b}$ (§ 99), altrimenti la pressione si fa negativa, e l'acqua più non siegue la parete del tubo.

115. **La portata d' un tubo adattato ad una luce scolpita in lastra sottile** è

$$Q = ft\sqrt{\frac{2g.(a+b)}{1+\frac{4f^2}{9m^2}}}.$$

Ora la portata della nuda luce è $\frac{5}{8}mt\sqrt{2ga}$: quindi paragonando queste due portate si potrà giudicare se il tubo sia di vantaggio, o di discapito alla portata.

116. **Se il tubo è cilindrico orizzontale** la portata sarà

$$Q = mt\sqrt{2g.\frac{9a}{13}},$$

e quella della nuda luce sarà $\frac{5}{8} ml\sqrt{2ga}$, onde la ragione delle due portate sarà quella di $\sqrt{\frac{9}{13}} : \frac{5}{8}$, o di (§ 111)

$$\sqrt{\frac{2}{3}} : \frac{5}{8} = 16\sqrt{\frac{2}{3}} : 10 = \sqrt{\frac{512}{3}} : 10 =$$

$$\sqrt{170} : 10 = 13 : 10$$

prossimamente: dunque un tubo addizionale accresce la portata nella ragione di 13 : 10.

Inoltre la portata della luce m cavata a seconda della vena contratta è $ml\sqrt{2ga}$. Paragonata questa come quella della luce scolpita in lastra sottile avremo, che saranno come

$$1 : \frac{5}{8} = 8 : 5 = 16 : 10 \ .$$

117. Da tutto ciò si ricava, che la portata della luce 1° scolpita in lastra sottile, 2° munita di tubo cilindrico 3° ricavata a seconda della vena contratta saranno come 10 a 13, a 16.

118. Un tubo conico divergente accresce ancor di più l'erogazione. Se diverge cosicchè sia $= \sqrt{2} : 1$, la portata diventa quasi uguale a quella che si avrebbe dalla luce formata ad imbuto a forma della vena contratta. Infatti se nella formola

$$ft\sqrt{\frac{2ga}{1 + \frac{4f^2}{9m^2}}}$$

si pone $\frac{f^2}{m^2} = 2$ avremo

$$ft\sqrt{\frac{2ga}{1 + \frac{8}{9}}} = ft\sqrt{\frac{9}{17} \cdot 2ga} :$$

ma $f = m\sqrt{2}$: dunque questa portata sarà

$$mt\sqrt{\frac{18}{17} \cdot 2ga}\,.$$

che poco differisce da $mt\sqrt{2ga}$, che è portata da una luce formata a secondo della vena contratta. Ma può ottenersi copia d'acqua maggiore dilatando la bocca del tubo ancor di più, e sino al limite, dopo quale la pressione si farebbe negativa.

CAPO XIX.

Moto dell'acqua per li lunghi tubi.

119. Al corso dell'acqua per li lunghi tubi fa notabile resistenza l'attrito. Questa resistenza è accresciuta dalla tenacità, colla quale le molecole aderiscono l'una all'altra, e s'attaccano alle pareti del tubo, e dalle parti più prossime alle pareti si propaga alle più lontane. Il difficile è di ricavare dall'esperienza gli elementi, e le loro relazioni per esprimere in calcolo la rèsistenza risultante: quindi si ricorrerà al partito di stabilire una ipotesi in qualche modo plausibile, e secondo questa comporre una formola per la resistenza fra gli elementi, che dall'ipotesi sono stati fissati come influire sulla detta resistenza. In questa formola poi si porranno dei coefficienti indeterminati da determinarsi dalle esperienze, colle quali si cercherà di accordare il fatto coll'ipotesi. Noi adotteremo questo partito, e perciò fisseremo la ipotesi e la formola risultante di Prony.

120. Questi stabilisce, che nei tubi dello stesso diametro la resistenza sia una funzione della velocità, in guisa che si componga di due termini, uno che contenga il quadrato della velocità, e l'altro la velocità semplice. Nei tubi poi di diverso diametro stabilisce, che la resistenza sia tanto

maggiore quanto è minore l'area della sezione, e quanto è maggiore il perimetro della medesima soggetto a stropicciamento. Di qui si vede, che la resistenza sarà inversamente proporzionale al rapporto dell'area al perimetro. Questo rapporto si chiama *raggio medio*. Si vede che pei tubi cilindrici il raggio medio è la quarta parte del diametro del tubo. Infatti l'area è espressa da πr^2, e la circonferenza da $2\pi r$, onde il raggio medio sarà

$$\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}.$$

121. Sia la resistenza gR, il raggio medio D, e la velocità u, è evidente che l'ipotesi di Prony sarà espressa dalla formola

$$R = \frac{3\alpha}{2D} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{3\beta}{2D} \cdot u$$

ove α, β sono i coefficienti indeterminati, e riguardo ai numeri sono posti quelli, che possono semplificare le applicazioni di calcolo.

122. **Si da l'equazione differenziale delle velocità dell'acqua che corre lungo un tubo cilindrico, ammessa la resistenza.** Sia dunque un tubo cilindrico di sezione f, che imbocchi con un gran recipiente ed inclinato al basso. La sua inclinazione alla verticale sia φ. Sia L la sua lunghezza, e b la sua altezza, essendo a l'altezza del livello costante del recipiente sul centro dell'imboccatura del tubo. Finalmente siano A, B le pressioni al livello, ed alla luce del tubo, ed H la pressione all'imboccatura. Si consideri ora una seziono f ad una distanza l dal centro dell'imboccatura, e z sia l'ascissa verticale di questa seziono dall'istesso centro. Consideriamo ora le forze che animano la falda fluida fdl. Il peso di questa falda sarà $gfdl$, e la forza sollecitante della falda sarà la componente

di $gfdl$ secondo dl : quindi sarà $gfdl\cos\varphi = gfdz$. La pressinne sulla faccia f della falda dopo l sarà gfp , e quella contraria sulla faccia f dopo $l+dl$ sarà $gf(p+dp)$: dunque questa falda sarà sospinta contrariamente al moto dalla forza $gfdp$. Finalmente tutti i punti della falda fdl risentendo la resistenza $g\mathrm{R}$, risentirà essa contrariamente al moto la resistenza $gf\mathrm{R}dl$: quindi il quantitativo di forza da cui è animata la falda sarà $gfdz - gfdp - gf\mathrm{R}dl$, che divisa per la falda fdl ci darà la forza acceleratrice $\frac{du}{dt}$: quindi

$$\frac{du}{dt} = \frac{gdz}{dl} - \frac{gdp}{dl} - g\mathrm{R}$$

e

$$dp = dz - \mathrm{R}dl - \frac{dl}{g} \cdot \frac{du}{dt} ,$$

la quale integrata nell' ipotesi di dt costante ci darà

$$p = \mathrm{C} + z - \mathrm{R}l - \frac{l}{g} \cdot \frac{du}{dt} .$$

123. Si porti all' imboccatura l' integrale , ed in questo essendo $p = \mathrm{H}$, $z = l = 0$, avremo $\mathrm{C} = \mathrm{H}$ onde

$$p = \mathrm{H} + z - \mathrm{R}l - \frac{l}{g} \frac{du}{dt}$$

Determineremo la pressione H dietro l'ipotesi, che levato il tubo, la luce che viene nel recipiente si può considerare come un tubo addizionale cilindrico orizzontale. In questo caso abbiamo (§ 111)

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{2}{3} (\mathrm{A} - \mathrm{H} + a) ,$$

e però

$$\mathrm{H} = \mathrm{A} + a - \frac{3}{2} \cdot \frac{u^2}{2g}$$

Finalmente alla luce del tubo deve essere $z = b$, $l = L$, $p = B$ avremo dunque

$$B = H + b - RL - \frac{L}{g}\ \frac{du}{dt}$$

Posti in questa i valori di H ed R e fatto $A = B$ avremo per determinare la velocità l'equazione

$$\frac{L}{g} \cdot \frac{du}{dt} = a + b - \frac{3}{2}\ \frac{u^2}{2g}\left(1 + \frac{\alpha L}{D}\right) - \frac{3\beta L}{2D}\ u$$

ossia

$$\frac{du}{dt} = \frac{g}{L}\ (a + b) - \frac{3\beta g}{2D}\ u - \frac{3}{4L}\left(1 + \frac{\alpha L}{D}\right)u^2$$

Facciasi per brevità $h = \frac{g}{L}\ (a + b)$;

$$k = \frac{3\beta g}{2D}\ , \quad m = \frac{3}{4L}\left(1 + \frac{\alpha L}{D}\right)$$

e si avrà

$$dt = \frac{du}{h - ku - mu^2}$$

Per integrare questa equazione facciasi $u = u - \frac{k}{2m}$ risulterà

$$(a) \qquad dt = \frac{1}{m} \cdot \frac{dx}{c^2 - x^2}\,, \qquad \text{ove} \quad c^2 = \frac{h}{m} + \frac{k^2}{4m^2}$$

decomposta la (a) in fattori ed integrata ci darà

$$t = C + \frac{1}{2mc}\,\ell\,\frac{c + x}{c - x}\,.$$

Si determini la costante in guisa che sia $t = 0$, $u = 0$ e perciò $x = \frac{k}{2m}$, e si avrà finalmente

$$t = \frac{1}{2mc} \ell \frac{(c + x)\left(c - \frac{k}{2m}\right)}{(c - x)\left(c + \frac{k}{2m}\right)}.$$

Se facciasi

$$\lambda = \frac{c + \frac{k}{2m}}{c - \frac{k}{2m}}$$

troveremo passando dai logaritmi ai numeri

$$x = c \frac{\lambda e^{2mct} - 1}{\lambda e^{2mct} + 1}$$

ed

$$u = c \frac{\lambda e^{2mct} - 1}{\lambda e^{2mct} + 1} - \frac{k}{2m}$$

124. Per poco che cresca il tempo la quantità e^{2mct} diviene grandissima, onde rispetto essa si possono trascurare le unità nel numeratore, e nel denominatore, con che avremo

$$(a) \qquad u = c - \frac{k}{2m},$$

cioè sarà il moto ridotto a permanente. Quadrando l'antecedente uguaglianza avremo

$$(b) \qquad u^2 = c^2 - \frac{kc}{m} + \frac{k^2}{4m^2}:$$

ma era (§. 123)

$$c^2 = \frac{h}{m} + \frac{k^2}{4m^2}$$

e dalla (a) qui sopra $c = u + \frac{k}{2m}$. Sostituendo dunque questi valori nella (b), e riducendo avremo $mu^2 + ku = h$, e ponendovi i valori di h, k, m (§. 123) si avrà

(A) $$\left(1+\frac{\alpha L}{D}\right)\frac{u^2}{2g}+\frac{\beta L u}{2g}=\frac{2}{3}(a+b)$$

125. Se quando (§. 122) abbiamo trovato le forze da cui era animato l'elemento della falda fluida, che erano espresse da $gfdz-gfdp-gRfdl$ si fosse supposto il moto permanente, si sarebbe posto uguale a zero questa quantità, perchè nel moto equabile la forza è nulla; con questo si sarebbe avuto $dp=dz-Rdl$. Questa integrata ci da $p=H+z-Rl$ perchè quando $z=0$, $l=0$, $p=H$. Poi abbiamo avuto (§. 123)

$$\frac{u^2}{2g}=\frac{2}{3}(A-H+u)$$

donde

$$H=A+a-\frac{3}{2}\frac{u^2}{2g}$$

Finalmente quando $z=b$, $l=L$ deve essere $p=B$: dunque $B=H+b-RL$. Posti per H, ed R i loro valori e supponendo al solito $A=B$ avremo per determinare la u l'equazione

(A) $$\left(1+\frac{\alpha L}{d}\right)\frac{u^2}{2g}+\frac{\beta L}{D}u=\frac{2}{3}(a+b)$$

come nel (§. 124).

Se si fosse supposto che il tubo imboccasse al recipiente conformandosi alla contrazione della vena, poichè in tal caso si sarebbe avuto $H=A+a-\frac{u^2}{2y}$, avremmo ottenuto in ultimo

$$\left(1+\frac{3\alpha L}{2D}\right)\frac{u^2}{2g}+\frac{3\beta L}{2D}u=a+b$$

126. **Si proponga ora il problema**. Inclinare il tubo alla verticale con tale angolo φ, che la velocità dello sbocco sia uguale a quella, colla quale l'acqua uscirebbe della luce del recipiente per un breve tubo addizionale.

L'equazione (A) (§. 124) diventa nel caso del problema

$$\text{(B)} \qquad \left(1+\frac{\alpha L}{D}\right)\frac{u^2}{2g}+\frac{\beta L}{D}u=\frac{2}{3}(a+L\cos\varphi)$$

ora l'ipotesi del problema ci da $\frac{u^2}{2g}=\frac{2}{3}a$; se dunque si ponga questo valore nella equazione antecedente, e si divida per L sarà

$$\cos\varphi=\frac{1}{D}(a\alpha+\beta\sqrt{3ag})$$

Se l'imboccatura fosse a seconda della vena contratta si avrebbe

$$\cos\varphi=\frac{3}{2D}(a\alpha+\beta\sqrt{2ag})$$

Essendo il risultamento indipendente L si vede, che quell'aumento di velocità che si produrrebbe dall'allungamento del tubo vien distrutto dalla resistenza.

127 Se il tubo è meno declive la velocità è minore di quella che si avrebbe dalla luce del recipiente per un tubo addizionale, e tanto più scema quanto più il tubo si prolunga. Se più declive la velocità è maggiore, e cresce allungandosi il tubo.

Per dimostrare ciò si faccia

$$\cos\varphi=\frac{1}{D}(a\alpha+\beta\sqrt{2ga})\pm N$$

essendo N una quantità positiva qualunque. Posto questo valore in (B) risulterà

$$\left(1+\frac{\alpha L}{D}\right)\frac{u^2}{2g}+\frac{\beta L}{D}u=\frac{2}{3}a\left(1+\frac{\alpha L}{D}\right)+\frac{2}{3}\frac{\beta L}{D}\sqrt{3ga}\pm\frac{2}{3}LN$$

e ponendo

$$m = \frac{\frac{\beta L}{D}}{1 + \frac{\alpha L}{D}},$$

si avrà

$$u^2 + 2gmu = \frac{2}{3}2ga + \frac{2}{3}2gm\sqrt{3ga} \pm \frac{4gLN}{3\left(1 + \frac{\alpha L}{D}\right)},$$

e quindi

$$u = -gm + \sqrt{\left(\left[gm + \sqrt{\frac{2}{3}2ga}\right]^2 \pm \frac{4gLN}{3\left(1 + \frac{\alpha L}{D}\right)}\right)}$$

quando $N = 0$ risulta $u = \sqrt{\frac{2}{3} . 2ga}$ come se il tubo non esistesse. Se N non è zero e si ammette il segno superiore il tubo sarà più declive, e verrà $u > \sqrt{\frac{2}{3} 2ga}$. Se finalmente si ammetterà, il segno inferiore, il tubo sarà meno declive ed $u < \sqrt{\frac{2}{g} 2ga}$. Il valore poi di u non solo dipende dal segno di che è affetta la quantità N, ma anche dalla lunghezza L del tubo, quindi la velocità si fa anche maggiore allungandosi il tubo.

CAPO XX.

Della pressione dell'acqua nella parete de' tubi.

128. **Per avere la pressione ad un punto qualunque della parete** si riprenda l'equazione (§. 124)

$$p = H + z - Rl$$

quando $z=b$ si ha $l = L$, $p=B$, o $p=A$ essendo $A=B$:

Dunque A = H + b — RL. Sottratta questa dalla antecedente sarà

$$p = A - b + z + R(L - b) \quad ,$$

ove ponendo il valore di R (§. 121) avremo

$$p = A - b + z + \frac{3}{2}\frac{L-l}{D}\left(\frac{\alpha u^2}{2g} + \beta u\right)$$

Se si supponga $b = L\cos\varphi$, $z = l\cos\varphi$ avremo

$$(a) \qquad p = A - (L - l)\cos\varphi + \frac{3}{2}\,\frac{L-l}{D}\left(\frac{\alpha u^2}{2g} + \beta u\right)$$

ora si ha

$$\cos\varphi = \frac{1}{D}\,(\alpha a + \beta\sqrt{3ag})$$

(§. 125) è poichè sotto questa inclinazione è come se il tubo non esistesse (§. 126), perciò sarà $u = \sqrt{\frac{2}{3}2ga}$, facendo queste sostituzioni in (a) avremo

$$p = A - \frac{L-l}{D}(\alpha a + \beta\sqrt{3ga}) + \frac{3}{2}\,\frac{(L-l)}{D}\left(\frac{2}{3}\alpha a + \beta \qquad \frac{2}{3}\cdot 2ga\right)$$

donde $p = A$. quindi il tubo è dovunque premuto colla pressione dell'aria atmosferica.

129. Essendo

$$R = \frac{3\alpha}{2D}\,\frac{m^2}{2g} + \frac{3\beta}{2D}\cdot u$$

l'equazione (a) diventa

$$(b) \qquad p = A + (L - l)(R - \cos\varphi)$$

E qui conviene osservare che quando

$$R = \cos\varphi \; \frac{1}{D}(\alpha a + \beta\sqrt{3ga}) \; ,$$

anche $R = \cos\varphi$, ed allora la pressione è ovunque uguale

alla pressione atmosferica; ma se sarà $\cos.\varphi < R$ la pressione all'origine del tubo ove $l = 0$ sarà $p > A$, ed andrà diminuendo fino allo sbocco in cui essendo $l = L$ risulta $p = A$. Al contrario se sarà $\cos.\varphi > R$ la pressione all'origine sarà $p < A$ e potrà esservi tal lunghezza del tubo per cui questa pressione si renda negativa; infatti l'equazione di p diviene in questo caso

$$p = A - L(\cos.\varphi - R) \;;$$

dove si vede che se sarà

$$A < L(\cos.\varphi - R)$$

risulterà $p < 0$.

CAPO XXI.

Moto di una data massa di acqua in un tubo.

129. Questo è il terzo caso, che rimaneva ad esaminarsi come fu proposto (pag. 145, § 39).

Per avere questo caso s' immagini un tubo ricurvo posto verticalmente in faccia di chi lo vuol considerare. Questo tubo abbia in alto due bracci di costanti sezioni fino a due punti più bassi dove si uniscono con un tubo interposto qualunque. La sezione costante del tubo a dritta sia f e quella del tubo a sinistra sia m. Sia ξ l' inclinazione del tubo a dritta alla verticale, φ l'inclinazione del tubo alla sinistra. Supponiamo questo tubo con una massa d'acqua, che sia in equilibrio e supponiamo che p sia l'altezza verticale dell' acqua nel tubo a sinistra, considerata dal livello fino alla sezione dove questo tubo si congiunge coll' interposto. Sia q l'analoga altezza dell'acqua nel tubo a dritta, si supponga, che turbandosi l' equilibrio l'acqua discenda nel tubo a sinistra e monti in quello a dritta: se

si consideri un tempo t di questo moto, il livello del tubo a dritta salga verticalmente della retta z. Sia a la differenza dei due livelli quando erano in equilibrio: cerchiamo questa differenza quando nel tempo t il livello a dritta sia montato di z. A questo fine cerchiamo di quanto sia sceso verticalmente il livello nel tubo a sinistra. Se il livello a dritta è montato di z dunque avrà percorso nel suo tubo la parte $\frac{z}{\cos.\xi}$, dunque sarà dentro lo stesso tubo montata acqua di quantità $\frac{fz}{\cos.\xi}$. Se diciamo x la lunghezza percorsa nello scendere del livello del tubo a sinistra nel tempo t la quantità d'acqua discesa sarà mx. Per la continuità del moto tanta acqua ascende nel tubo a dritta quanta ne discende nell'altro, dunque

$$mx = \frac{fz}{\cos.\xi} \quad \text{ed} \quad x = \frac{fz}{m\cos.\xi},$$

e la scesa verticale sarà espressa da $\frac{fz\cos.\varphi}{m\cos.\xi}$.

130. La differenza verticale primitiva dei due livelli era a: ora nel tempo t essendo asceso verticalmente il livello a dritta di z, questa quantità ha diminuito dal basso in alto tale differenza a di z, e perchè in pari tempo il livello a sinistra è disceso verticalmente di

$$\frac{fz\cos.\varphi}{m\cos.\xi}$$

di questa quantità dall'alto in basso ha diminuito lo stesso a, dunque la differenza dei due livelli dopo il tempo t sarà

$$a - z - \frac{fz\cos.\varphi}{m\cos.\xi},$$

e se si ponga

$$1 + \frac{f\cos.\varphi}{m\cos.\xi} = b\ ;$$

quella differenza sarà $a - bz$.

131. Si deve ora per tutto il tubo trovare $\int\frac{dl}{y}$. Applicandolo al tubo a sinistra $\int\frac{dl}{y}$ sarà

$$\int\frac{dl}{m} = \frac{l}{m},$$

dove la l è la lunghezza del tubo fino alla posiziono del suo livello dopo il tempo t. Ora la lunghezza fino alla prima posizione al principio del moto era espressa da $\frac{p}{\cos.\varphi}$, e questa lunghezza si è diminuita di $\frac{fz}{m\cos.\xi}$, spazio percorso dal livello, dunque dopo il tempo t avremo

$$l = \frac{p}{\cos\varphi} - \frac{fz}{m\cos.\xi},$$

e perciò

$$\int\frac{dl}{y} = \frac{p}{m\cos.\varphi} - \frac{fz}{m^2\cos.\xi}.$$

Applicando $\int\frac{dl}{y}$ al tubo a dritta sarà esso $\frac{l}{f}$ dovo la l sarà la lunghezza fino alla posizione del livello dopo il tempo t, ma quella lunghezza era al principio $\frac{q}{\cos.\xi}$ ed il

livello nel tempo t ha percorso $\frac{z}{\cos.\xi}$; dunque sarà

$$l = \frac{q}{\cos.\xi} + \frac{z}{\cos.\xi};$$

e quindi

$$\int \frac{dl}{y} = \frac{q}{f\cos.\xi} + \frac{z}{f\cos.\xi}.$$

Se $\int \frac{dl}{y}$ per il tubo interposto si esprima per S, sarà per tutto il tubo

$$\int \frac{dl}{y} = S + \frac{p}{m\cos.\varphi} + \frac{q}{f\cos.\xi} + \frac{z}{f\cos.\xi} - \frac{fz}{m^2\cos\xi},$$

e ponendo

$$S + \frac{p}{m\cos.\varphi} + \frac{q}{f\cos.\xi} = P.$$

sarà

$$\int \frac{dl}{y} = P + \frac{z}{f\cos\xi}\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right).$$

132. Si riprenda la formola generale del moto lineare: in questa la differenza A—B delle pressioni atmosferiche sopra i due livelli sarà zero, e $k—h$ differenza dei due livelli sarà $a—bz$, e si dica c la velocità colla quale ascende il livello del tubo a destra. Dunque quella formola nel caso nostro sarà

$$a - bz = \frac{fdc}{gdt}\left(P + \frac{z}{f\cos.\xi}\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right)\right) + \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right).$$

Questa equazione contiene tre variabili c, t, z, per eliminarne una, cioè la dt si prenda l'equazione

$cdt = \frac{dz}{\cos.\xi}$; si faccia $\frac{c^2}{2g} = s$ onde $\frac{cdc}{g} = ds$,

e fatte quindi le sostituzioni antecedenti, diventerà

$$adz - bzdz = \mathrm{P}fds\cos.\xi + (sdz + zds)\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right).$$

Integrando questa equazione e trovando il valore di s avremo

$$s = \frac{az - \frac{1}{2}bz^2}{\mathrm{P}f\cos.\xi + z\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right)}$$

133. Questa espressione diventa nulla tanto per $z = 0$ quanto per

$$z = \frac{2a}{b} = \frac{2am\cos.\xi}{m\cos\xi + f\cos\varphi}\ .$$

e questa sarà l'escursione verticale dell'acqua dentro il tubo a dritta per la quale avremo tanto la velocità c quanto l'altezza dovuta ad essa, uguale a zero cioè la quiete ; è facile vedere che l'escursione discendente nel ramo a sinistra sarà

$$\frac{2af}{m\cos\xi + f\cos.\varphi}$$

È da notarsi che l'ampiezza di questa escursione non dipende nè da P, nè da S; e perciò non dipende nè dalla lunghezza l del tronco intermedio ai due rami del sifone, nè dalle sue sezioni y ossia dalla sua configurazione. Nell' equilibrio dove $z = \frac{2a}{b}$ la quantità $a - bz$ dif-

ferenza dei due livelli diventa $-a$, adunque il livello a dritta si eleva su quello a sinistra di tanto di quanto n'era depresso al principio del moto: dunque avrà luogo una seconda escursione da dritta a sinistra per determinare la quale nei due tubi le lettere p, m, φ si cambieranno nelle q, f, ξ dunque l'escursione dell'acqua nel tubo a sinistra salendo sarà $\frac{2af}{m\cos.\xi + f\cos.\varphi}$ cioè uguale alla precedente discesa, e reciprocamente l'escursione discendente nel ramo a dritta sarà $\frac{2am}{m\cos.\xi + f\cos.\varphi}$ uguale alla precedente salita, dunque la seconda escursione ricondurrà i livelli dell'acqua alli stessi punti d'onde erano partiti, talchè si vede che l'acqua oscillerà perpetuamente a modo d' un pendolo.

134. **Caso nel quale i due tubi siano della stessa sezione.** In questo caso $m=f$, ed il valore di s diventa

$$s = \frac{2az - bz^2}{2Pf\cos.\xi}.$$

Se a questa formola si applica la regola del massimo si trova $z = \frac{a}{b}$, ma per arrivare alla quiete si richiederà (§. 133) $z = \frac{2a}{b}$ dunque colla metà del cammino nel nostro caso ha luogo la velocità massima.

135. **Determinazione del tempo dell'oscillazione.** Abbiamo l'equazione $cdt = \frac{dz}{\cos.\xi}$ dunque

$$dt = \frac{dz}{c\cos.\xi} = \frac{dz}{\cos.\xi\,\sqrt{(2gs)}} = \sqrt{\frac{Pf}{bg\cos.\xi}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2az}{b} - z^2\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\mathrm{P}f}{bg\cos.\xi}}\quad\frac{dz}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{2az}{b}-z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\mathrm{P}f}{bg\cos.\xi}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\left(z-\frac{a}{b}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\mathrm{P}f}{bg\cos.\xi}}\cdot\frac{\frac{bdz}{a}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\left(z-\frac{a}{b}\right)^2}}.$$

Integrando questa espressione avremo

$$t=\sqrt{\frac{\mathrm{P}f}{bg\cos.\xi}}\,\text{arc.sen.}\left[=\frac{b}{a}\left(z-\frac{a}{b}\right)\right]$$

$$=\sqrt{\frac{\mathrm{P}f}{bg\cos.\xi}}\,\text{arc.sen}\left(=\frac{bz}{a}-1\right),$$

facendo

$$z=\frac{2a}{b}\qquad\text{avremo}\qquad t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{P}f}{bg\cos.\xi}}$$

perchè fatta quella sostituzione abbiamo

$$\text{arc.sen.}(=1),$$

e questo è un quarto di circonferenza, o $\frac{\pi}{2}$, intendendo al solito π la mezza circonferenza di raggio uno. Se si porta quell' integrale al principio del moto dove $z=0$, e $t=0$ avremo

$$\text{arc.sen.}(=-1)\ .$$

Questo

$$\text{arco seno } (=-1) \text{ è } -\frac{\pi}{2},$$

dunque al principio avremo

$$0=-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{Pf}{bg\cos.\xi}},$$

e l'integrale fra i limiti sarà

$$t=\pi\sqrt{\frac{Pf}{bg\cos.\xi}}.$$

Sostituendo il valore di b, ricordandoci che $f=m$, avremo finalmente

$$t=\pi\sqrt{\frac{Pf}{g\cos.\varphi+g\cos\xi}},$$

questo è il tempo di una oscillazione; per avere il tempo della seguente bisognerà cambiare q, $\cos.\xi$ in p, $\cos.\varphi$ e viceversa, ma per questo cambiamento rimane la stessa espressione del tempo dunque la seconda oscillazione è dello stesso tempo, o sincrona colla prima.

136. Se si osserva il valore di questo tempo si vede essere esso indipendente dalla posizione dei livelli primitivi, perchè le inclinazioni φ e ξ dei tubi alla verticale sono variabili a piacere.

Si vede però che questo tempo dipende dalla lunghezza dei due tubi

$$\frac{p}{\cos.\varphi},\ \frac{q}{\cos.\xi}$$

e dipende dalla lunghezza del tubo intermedio e dalla sua configurazione o diverse sue sezioni. Le lunghezze dei due tubi e dell'interposto danno il tempo più lungo, o più corto della oscillazione secondo che queste lunghezze sono più grandi o più piccole. Le sezioni poi del tubo interposto trovandosi nei denominatori di

$$\int \frac{dl}{y}\text{, o di S}$$

daranno il tempo più lungo o l'oscillazione più lenta secondo che più piccole siano le dette sezioni, o sia secondo che più stretto sia il tubo, come saranno più veloci secondo che il tubo sarà più largo.

137. Sappiamo che la formola del tempo del pendolo semplice è

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

dove r è la lunghezza del pendolo, dunque la lunghezza del pendolo sincrono alla oscillazione dell'acqua nel nostro tubo è

$$\frac{Pf}{\cos.\varphi + \cos.\xi}.$$

138. Supponiamo che l'intero tubo sia cilindrico. Siano l l' le lunghezze dei tubi retti ed L la lunghezza del tubo interposto. In tal caso nell'espressione

$$P = S + \frac{p}{f\cos.\varphi} + \frac{q}{f\cos.\xi}$$

in luogo di

$$\frac{p}{f\cos.\varphi}, \frac{q}{f\cos.\xi}$$

dovremo porre l e l', inoltre essendo

$$S = \int \frac{dl}{y} = \int \frac{dl}{f} = \frac{l}{f}$$

dunque invece di S dovremo porre $\frac{L}{f}$ onde avremo

$$P = \frac{L}{f} + \frac{l}{f} + \frac{l'}{f},$$

e

$$Pf = L + l + l' \quad ,$$

in tal caso la lunghezza del pendolo semplice sincrono alla nostra oscillazione sarà

$$\frac{L + l + l'}{\cos.\varphi + \cos.\xi}$$

che è la lunghezza dell'intero tubo divisa per la somma dei coseni delle inclinazioni dei tubi retti alla verticale.

Se i tratti estremi nei quali oscilla l'acqua saranno verticali essendo

$$\varphi = \xi = 0,$$

la lunghezza del pendolo sarà

$$\frac{L + l + l'}{2}$$

ossia metà della colonna oscillante.

139. **Legge delle oscillazioni piccolissime**. Lorquando le oscillazioni si suppongano piccolissime, qualunque sia la figura dei tubi nelle quali si effettuano, possono ritenersi per quel tratto come cilidrici, e così avrà luogo (§. 132)

$$s = \frac{az - \frac{bz^2}{2}}{Pf\cos\xi + z\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right)} \; .$$

Ma essendo qui z piccolissima, potrà tralasciarsi il secondo termine del denominatore. e sarà

$$s = \frac{2az - bz^2}{2Pf\cos.\xi}$$

come al §. 134, e perciò le oscillazioni saranno isocrone, qualunque sia la loro ampiezza, purchè sempre assai piccola, e la lunghezza del pendolo sincrono sarà dato da

$$\frac{Pf}{\cos.\varphi + \cos\xi} \; .$$

INDICE

PROEMIO

PARTE PRIMA

Idrodinamica

PARTE SECONDA

Idrostatica

IMPRIMATUR

Fr. Hieronymus Gigli Ord. Pr. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

Petrus De Villanova Castellacci Archiep. Petrae Viscesgerens.